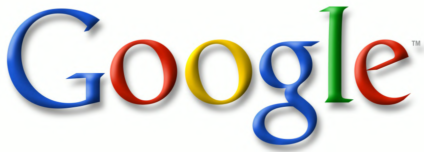
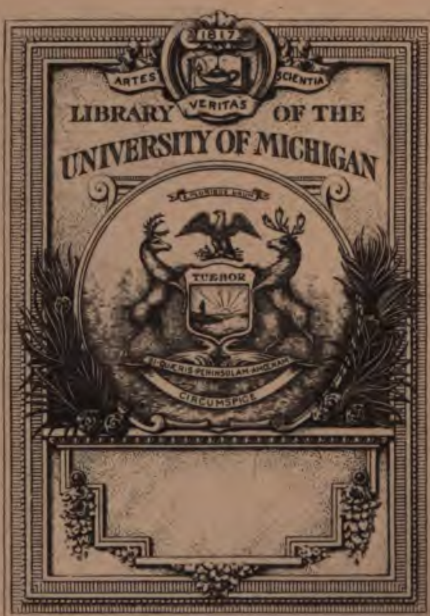



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

les

ge

lui


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ASTRONOMIE NAUTIQUE:

OU

ÉLÉMENS D'ASTRONOMIE,

Tant pour un Obſervatoire fixe, que pour un Obſervatoire mobile.

Par M. DE *MAUPERTUIS.*

Seconde édition.

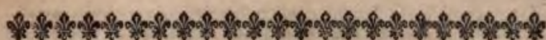
Præceps, aerii ſpecula de montis, in undas
Deferar.

Virgil. Eclog. VIII.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLI.



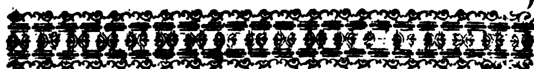
AVERTISSEMENT.

*C*ETTE *nouvelle édition eſt différente de la première, quoiqu'elle ne contienne guère que les mêmes choſes, & que l'ordre même n'en ſoit pas fort différent. J'avois bien déduit toute cette Aſtronomie de cinq ſeules Formules, qui en effet donnent la ſolution de tous les Problèmes poſſibles : cependant quelquefois je ne m'étois pas aſſez étendu ſur toutes les circonſtances d'une Queſtion, & quelquefois il m'étoit arrivé de traiter comme des Queſtions différentes ce que je pouvois réduire à une même en lui donnant un autre énoncé. Dans cette édition j'ai diminué le nombre des Problèmes, quoique j'aie rendu l'ouvrage plus complet ; & je crois en tout lui avoir donné une meilleure forme.*

AVERTISSEMENT.

On trouvera encore une autre différence entre les deux éditions. Dans la première toutes les ſolutions de Problèmes n'étoient qu'en Exemples, qui ne pouvoient avoir toute la généralité poſſible; dans celle-ci toutes les Solutions ſont en préceptes généraux : & comme l'uſage de ces préceptes pouvoit reſter difficile, j'en ai toûjours fait enſuite l'application à des Exemples.

Enfin j'ai retranché entièrement quelques Problèmes, comme trop faciles à déduire de ce que j'ai donné, ou comme inutiles, ou comme trop étrangers à ma matière.



PRÉFACE.

Tout l'Art du Navigateur consiste à pouvoir connoître à chaque instant le point de la surface de la Mer où il est ; & l'on peut réduire sous deux genres tous les moyens qu'il a pour cela : on peut appeler *Moyens Géographiques*, ceux qui consistent dans la direction & la longueur de la route : les autres, que j'appellerai *Moyens Astronomiques*, comprennent tous ceux qu'on peut tirer de l'observation des Astres.

Malgré cette division, on ne doit pas regarder ces différens moyens comme absolument indépendans les uns des autres. Ceux que l'Astronomie fournit, dépendent à la vérité

fort peu des moyens géographiques : mais ces derniers ne ſauroient atteindre à leur perfection ſans le ſecours de l'Aſtronomie. La direction de la route indiquée par la Bouſſole, n'eſt pas toûjours la véritable direction : cette Aiguille admirable qui montre le Nord au Navigateur, ne le lui montre pas conſtamment ni exactement : l'obſervation des Aſtres le fait apercevoir de ſes variations, & le met à portée d'y remédier. Dès qu'il a perdu de vûe les Terres, qu'il ne voit plus que le Ciel & la Mer, les Aſtres ſont les ſeuls flambeaux qui puiſſent le conduire en ſûreté.

Si l'on fait l'énumération de tous les moyens qu'on a, ou qu'il ſemble qu'on ait pour trouver le point du Globe où l'on eſt, & qu'on conſidère

le Problème ſpéculativement ; on croira qu'il y a plus de choſes données qu'il n'eſt néceſſaire pour le réſoudre, & qu'il eſt un de ces Problèmes que les Géomètres appellent *plus que déterminés :* mais ſi l'on conſidère que la plûpart de ces moyens ne ſont donnés qu'aſſez imparfaitement, & que chacun a beſoin d'être corrigé ou confirmé par les autres, on verra que tous, réunis enſemble, ſuffiſent à peine.

On ne ſauroit donc trop s'appliquer à perfectionner chacun des moyens. Ce ſeroit un grand avantage ſi les uns n'étoient jamais néceſſaires que lorſque les circonſtances empêcheroient de ſe ſervir des autres : ou ſi au lieu des corrections que ces différens moyens ſe procurent, ils ne

ſervoient jamais qu'à ſe confirmer.

Dans mes *E'lémens de Géographie*, & dans les Mémoires de l'Académie*, j'ai expoſé les Moyens Géographiques ; ceux qui dépendent de la grandeur des Degrés de la Terre, de la direction de la route, & de la longueur des Arcs que le Vaiſſeau trace ſur la ſurface de la Mer.

Les Moyens Aſtronomiques ſe réduiſent à deux principaux : l'un eſt *la Latitude ;* l'autre, *la Longitude.*

J'ai expliqué dans le *Diſcours ſur la Parallaxe de la Lune,* l'uſage qu'on peut faire de cet Aſtre pour connoître la Longitude ſur Mer ; & comme cette méthode m'a paru celle qui juſqu'ici eſt le plus à notre portée, je me ſuis attaché à la perfectionner.

* *Mémoires de l'Acad. année 1742.*

Je viens maintenant à la Latitude; à ce point principal de l'Art du Pilote, qui lui fait connoître à quelle diſtance il eſt de l'E'quateur.

Lorſque j'ai commencé cette partie de la Navigation, je n'ai pas prévû toute l'étendue qu'elle devoit avoir. En effet, ſi je ne deſtinois ce que j'ai à dire ſur la Latitude que pour l'uſage ordinaire des gens de Mer, l'ouvrage ne ſeroit pas long. La hauteur méridienne du Soleil, ou de quelqu'E'toile, dont la déclinaiſon ſoit connue, leur ſuffit pour déterminer cette Latitude: & ils ſont ſi bornés à cette méthode, que ſi quelque nuage les empêche de voir le Soleil ou l'E'toile au moment de leur paſſage par le Méridien, ils ne connoiſſent guère d'autre moyen aſtronomique pour y ſuppléer.

Mais quand j'ai voulu parcourir toutes les reſſources que le Navigateur peut tirer de l'obſervation des Aſtres, j'ai trouvé tant de choſes utiles ou curieuſes, que j'ai vû que l'ouvrage méritoit beaucoup plus d'étendue que je n'avois penſé : j'ai vû que quoique l'Aſtronomie ordinaire des gens de Mer fût fort bornée, une ſcience beaucoup plus vaſte leur ſeroit utile : que quoique leurs obſervations fuſſent aſſez ſimples, on pouvoit leur en enſeigner de plus ſimples encore : enfin j'ai trouvé des méthodes qui ne ſuppoſent ni adreſſe, ni même preſque d'Inſtrumens.

La recherche de tous les moyens par leſquels on peut trouver la Latitude, m'a jeté dans une Théorie aſſez étendue, & m'a conduit à un ouvrage

qu'on peut appeler *Des Elémens d'Aſtronomie, tant pour un Obſervatoire fixe, que pour un Obſervatoire mobile.*

En effet, on peut conſidérer le Navigateur comme un Aſtronome, qui ne diffère de l'Aſtronome ordinaire, qu'en ce que celui-ci fait ſes obſervations dans un lieu fixe, & que celui-là fait les ſiennes dans un Obſervatoire entraîné par les vents, & continuellement agité. Et ſi la préciſion qu'on exige de celui qui ſe trouve dans toutes les circonſtances favorables, rend ſon art difficile; on peut dire que le défaut de ces circonſtances rend l'art de l'autre plus difficile encore, & l'oblige d'avoir recours à des méthodes plus ſubtiles.

Il eſt vrai qu'on n'exige pas de l'*Aſtronome Navigateur* le même degré de préciſion qu'on exige de l'*Aſtronome ſédentaire*. Celui-ci appliqué à perfectionner l'Aſtronomie, ne doit négliger aucun des moyens qui peuvent donner ou augmenter la préciſion, quelque pénibles qu'ils puiſſent être : celui-là, content de bien diriger ſa route, doit ſouvent faire céder une préciſion ſcrupuleuſe à la facilité & à la commodité de ſes opérations. Une quantité de quelques ſecondes eſt importante pour l'Aſtronome : le Pilote peut impunément négliger quelques minutes : c'eſt au Géomètre à calculer les cas où cette préciſion eſt néceſſaire, & ceux où l'on peut uſer de cette licence. Enfin quelquefois le Navigateur ſeroit heu-

reux de connoître ſa Latitude d'une manière encore moins exacte.

J'ai eu tous ces cas en vûe dans les Problèmes qui compoſent l'ouvrage ſuivant.

Dans les uns, je ſuppoſe l'Aſtronome dans l'Obſervatoire le plus ſtable, le plus commode, & le mieux muni d'Inſtrumens : & je lui propoſe des moyens pour perfectionner l'Aſtronomie.

D'autres Problèmes ſont deſtinés pour un Aſtronome dont l'Obſervatoire ſeroit bien pourvû d'Inſtrumens, mais continuellement agité ; & je lui propoſe les moyens que cette agitation rend néceſſaires, & laiſſe poſſibles.

Enfin on trouvera des Problèmes dans leſquels je ne ſuppoſe plus un

Aſtronome, mais un Navigateur ſans ſcience, ſans induſtrie, dénué d'Inſtrumens, tel qu'il peut ſe trouver après un Naufrage : & je lui offre les dernières reſſources qu'un état auſſi malheureux lui permet.

Ces différentes ſortes de Problèmes ſembloient exiger qu'on les diſtinguât, & qu'on en formât différentes parties de l'ouvrage : mais ſi les uſages différens auxquels ils ſont deſtinés, exigeoient un tel ordre, la nature de la choſe ne l'a point permis, & j'ai cru devoir ſuivre la connexion que ces Problèmes avoient les uns avec les autres, plûtôt que de les aſſujétir aux circonſtances où ſe peut trouver celui qui s'en ſert.

On ne doit donc pas s'attendre à trouver ici un ouvrage qui ſoit à la

portée de tous les Pilotes. J'ai voulu préſenter l'Art dans toute ſon étendue : propoſer ce que les Aſtronomes pourroient entreprendre dans des Obſervatoires ſtables & commodes : ce que pourroient exécuter d'habiles Pilotes ſur leurs Vaiſſeaux : enfin ce qui reſteroit à faire pour les Navigateurs les plus bornés, & dans les occaſions les plus fâcheuſes.

Cet ouvrage eſt, comme on voit, fort différent de tous les Traités d'Aſtronomie qui ont paru juſqu'ici ; plus différent encore de tous les Traités de Navigation. Dans les uns on ne s'eſt attaché qu'aux méthodes qui ſuppoſent des Obſervatoires fixes ; & il s'en faut bien qu'on les ait toutes épuiſées : dans les autres on s'eſt contenté de donner quelques Problèmes

aſtronomiques des plus ſimples. Et l'on a réduit ainſi l'Aſtronomie ordinaire à ne pouvoir guère être utile au Navigateur ; ou l'Aſtronomie du Navigateur à n'être qu'une petite partie de l'autre Aſtronomie.

On trouvera au contraire dans notre *Aſtronomie Nautique* une ſcience ſupérieure à l'Aſtronomie ordinaire. En effet, l'Aſtronomie qui s'exerce dans un Obſervatoire continuellement agité, & dont le lieu ſur le Globe de la Terre, change continuellement, eſt beaucoup plus difficile, & a beſoin d'une plus grande induſtrie que celle qui jouit du repos.

Je ne puis mieux faire ſentir la différence de ces deux Aſtronomies, que par la conſidération de quelques-

uns des Problèmes qu'on trouvera dans l'ouvrage ſuivant.

De toutes les obſervations qu'on peut faire ſur Mer, la plus facile & la plus exacte, c'eſt celle du lever & du coucher du Soleil. On n'a beſoin d'aucun Inſtrument. Tout le monde ſait que lorſque cet Aſtre eſt dans l'horizon, l'épaiſſeur de l'Atmoſphère interceptant une grande partie de ſes rayons, nous permet de voir ſon Diſque ſans avoir beſoin d'armer l'œil d'aucun Verre coloré, & ſans crainte d'en être éblouis. La ligne qui termine l'horizon ſenſible, eſt ſi éloignée de l'Obſervateur par rapport aux petites différences que l'agitation des flots cauſe à la hauteur où il ſe trouve, qu'il peut prendre les momens où il obſerve l'émerſion &

l'immerſion du Soleil dans l'horizon, pour les mêmes qu'ils ſeroient ſi le Vaiſſeau reſtoit immobile.

Mais cette obſervation ſi ſimple & ſi ſûre, ſi l'on en veut faire l'uſage qui ſe préſente d'abord à l'eſprit pour trouver la Latitude, ſuppoſe qu'on ſache l'heure à laquelle elle ſe fait : & l'on ne peut avoir l'heure ſur la Mer, que par des obſervations qui n'ont ni la même ſimplicité, ni la même exactitude.

J'ai donc cherché une méthode pour trouver la Latitude par les obſervations du lever & du coucher du Soleil, qui fût indépendante de l'heure vraie ; & dans laquelle on n'auroit à conſidérer que l'intervalle de temps écoulé entre ces obſervations ; intervalle qu'on peut connoître par

par une ſimple Montre, qui n'a pas beſoin d'être réglée ſur le Soleil, pourvû ſeulement que ſon mouvement ſoit aſſez uniforme pendant 24 heures.

J'ai penſé que réduiſant le Problème à des obſervations qu'on peut faire dans un Vaiſſeau avec autant de préciſion que dans un Obſervatoire inébranlable, j'aurois une méthode qui donneroit la Latitude ſur Mer auſſi exactement qu'elle la pourroit donner ſur Terre.

Mais je ne puis diſſimuler qu'en réduiſant le Problème à une ſi grande ſimplicité pour l'Obſervateur, il devient difficile pour le Géomètre qui le veut réſoudre. Il ſemble qu'il y ait dans la ſcience que nous traitons, une fatale compenſation entre la ſimplicité

des opérations, & la difficulté des calculs.

Pour faire connoître cette difficulté, il faut donner une idée du Problème dans toute ſon étendue.

On ſait que pour tous les peuples de la Terre, chaque jour de l'année a ſa durée particulière : d'autant plus longue pour chacun pendant ſon été, & d'autant plus courte pendant ſon hiver, qu'il habite une région plus éloignée de l'E'quateur. Il y a donc pour chaque lieu un jour qui eſt le plus long de tous les jours de l'année, & un jour qui eſt le plus court. Le plus long jour eſt d'autant plus long, & le plus court eſt d'autant plus court, que le lieu eſt plus près du Pole : dès qu'on atteint le Cercle polaire, le plus long jour ne finit plus ; le Soleil au

Solſtice d'été ne ſe couche plus pour les habitans des Zones glacées ; Il ne ſe lève plus pour eux lorſqu'il eſt au Solſtice d'hiver.

On peut donc par la durée du plus long jour, connoître la diſtance où l'on eſt du Pole, qui eſt le complément de la Latitude.

C'eſt ainſi que les anciens Géographes avoient déterminé les Latitudes de pluſieurs Villes des trois parties du Monde connues de leur temps. Et Ptolémée, qui nous a laiſſé ces Latitudes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Pluſieurs cauſes cependant rendoient ces déterminations peu exactes. Les Anciens ne connoiſſoient ni la Réfraction, ni la Parallaxe du Soleil, ni aſſez exactement l'Obliquité de

l'E'cliptique ; & ils n'avoient point de mesure du temps assez précise.

Ce sont-là les causes des erreurs qu'on trouve dans les Latitudes déterminées par les Anciens. Les connoissances qu'on a aujourd'hui, nous mettent à portée de les corriger : mais le Problème, tel qu'ils se le sont proposé, demeure sujet à une grande limitation. C'est que dépendant de l'observation de la durée du plus long ou du plus court jour, il n'y a que deux jours dans l'année où l'on puisse le résoudre.

Voici pourquoi jusqu'ici l'on s'est astreint à cette condition.

La durée du jour dépend de deux causes : 1.° du lieu que l'Observateur occupe sur le Globe de la Terre : 2.° du lieu du Soleil dans l'E'cliptique.

Dans chaque lieu de la Terre, plus le Soleil s'approche du Tropique voiſin, plus le temps de ſon ſéjour ſur l'horizon eſt long; plus il s'éloigne du Tropique, plus ce temps eſt court.

Mais le changement continuel de déclinaiſon du Soleil qui, pendant le cours de l'année, rend dans chaque lieu les jours inégaux, altère la durée même de chaque jour, rend inégaux ſon ſoir & ſon matin : rend chaque jour plus long ou plus court qu'il ne ſeroit ſi le Soleil à ſon coucher avoit conſervé la même déclinaiſon qu'il avoit à ſon lever.

Dans deux points ſeuls de l'Ecliptique, la déclinaiſon du Soleil demeure aſſez conſtamment la même pour ne cauſer à la durée du jour aucune altération ſenſible : ces points

ſont ceux où le Soleil, après s'être éloigné de l'E'quateur, ceſſe de s'en éloigner, & s'en rapproche. Et ces points, qui ſont les points ſolſticiaux, répondent au plus long & au plus court jour de l'année.

Voilà pourquoi juſqu'ici l'on s'eſt fixé à ces jours, pour trouver la Latitude par leur durée. Mais on voit par-là combien cette reſtriction rend le Problème peu utile pour le Navigateur, qui chaque jour a beſoin de connoître ſa Latitude.

D'autres cauſes encore ſemblent lui refuſer l'uſage de ce Problème. Nous avons vû que l'agitation des flots ne changeoit point l'inſtant du lever & du coucher du Soleil : mais il n'en eſt pas ainſi du tranſport du Vaiſſeau d'un lieu à l'autre. Selon la

plage vers laquelle il navigue, il va trouver un jour plus long ou plus court que celui que le lieu du matin lui promettoit : & quoique les momens de l'émersion & de l'immersion du Soleil dans l'horizon soient les mêmes qu'ils seroient si l'Observateur n'éprouvoit aucune agitation, ils ne sont pas séparés par le même intervalle qu'ils le seroient si l'Observateur étoit demeuré au même lieu. Pour m'expliquer plus briévement, l'agitation n'apporte aucun trouble à l'observation du lever ni du coucher du Soleil, mais le mouvement progressif du Vaisseau, éloigne ou rapproche ces deux instans, & change pour le Navigateur la durée qui les sépare.

J'ai voulu vaincre toutes ces difficultés, & rendre praticable sur la Mer,

& tous les jours de l'année, une méthode qui a ſur toutes les autres de ſi grands avantages, par le genre d'obſervations qu'elle demande.

Mais le Problème ſimple & facile lorſqu'on le réſout comme les Anciens l'ont réſolu, dans un Obſervatoire fixe, ſans avoir égard à la Réfraction, ni à la Parallaxe, & qu'on l'aſtreint au jour du Solſtice, devient difficile lorſqu'on veut le réſoudre pour tous les jours de l'année, & dans toutes les circonſtances où le Navigateur ſe trouve.

Car 1.° la Réfraction faiſant paroître le Soleil avant qu'il ſe lève, & le faiſant paroître encore après qu'il eſt couché, rend le jour plus long qu'il n'eſt réellement.

2.° En tout autre temps qu'aux Solſtices, le changement continuel

de déclinaiſon du Soleil altère la durée du jour, & l'alonge ou la raccourcit ſelon que le Soleil s'approche ou s'éloigne du Tropique.

3.° L'Obſervatoire ſe mouvant lui-même, fait voir au Navigateur un jour plus long ou plus court, ſelon le lieu où il dirige ſa route.

Je ne parle point de l'effet de la Parallaxe du Soleil, parce qu'il eſt trop peu conſidérable pour qu'on y doive faire attention dans les Problèmes Nautiques. Si cependant on y vouloit avoir égard, on ſait que l'effet de cette Parallaxe étant de faire voir le Soleil plus bas qu'il n'eſt par rapport au centre de la Terre, pendant que la Réfraction le fait voir plus haut; il n'y a qu'à retrancher la Parallaxe de la Réfraction, & prendre

le reſte pour la quantité dont le Soleil paroît plus élevé qu'il n'eſt.

Pour réſoudre le Problème dans toutes ſes circonſtances; il faut donc apprécier ce que chacune contribue à rendre le jour plus long ou plus court, & chercher quelle ſeroit ſa durée pour un Obſervateur; qui depuis le lever du Soleil juſqu'à ſon coucher ſeroit demeuré à la même place; qui ſeroit ſur une Terre qui n'auroit point d'Atmoſphère, ou dont l'Atmoſphère ne cauſeroit aux rayons de lumière aucune réfraction : enfin qui obſerveroit un Soleil qui depuis ſon lever juſqu'à ſon coucher conſerveroit toûjours la même déclinaiſon.

Le calcul eſt compliqué : mais la peine ne ſera que pour le Géomètre. Il pourra donner au Pilote des Tables

par le moyen desquelles il aura sa Latitude, en observant seulement la durée apparente du jour ; & à peu-près la route qu'il aura tenue du matin au soir.

Il n'y a plus à ce Problème qu'une restriction ; mais une restriction qui est attachée à la nature de la chose, & qui ne peut guère nuire dans l'usage qu'on en veut faire. Deux seuls jours de l'année la méthode des Anciens étoit praticable : il n'y a que deux jours dans l'année où l'on ne puisse pas pratiquer la nôtre ; qui sont les jours de l'E'quinoxe. Lorsque le Soleil est à ces points, les jours étant égaux dans tous les lieux de la Terre, il est évident qu'on ne sauroit déterminer la Latitude d'aucun lieu par leur durée. Hors de ces temps, notre méthode est universelle.

Je parlerai maintenant d'un autre Problème, qui ne donne qu'une exactitude fort bornée, mais qui mérite d'être connue par sa singularité, & par la simplicité de l'observation qu'elle exige. Elle feroit *trouver la Latitude par le seul temps que le Soleil ou la Lune emploient à s'élever de tout leur Disque au dessus de l'horizon, ou à se plonger au dessous.*

Ce temps en général dépendant de la grandeur du diamètre de l'Astre, de sa déclinaison, & de la hauteur du Pole dans le lieu de l'observation; pour un jour de l'année donné, ne dépend donc plus que de la hauteur du Pole. Plus l'axe de la Terre est élevé, plus l'E'quateur & ses Cercles parallèles sont coupés obliquement par l'horizon, plus le temps de l'émersion

& de l'immersion du Disque est long : & sa durée détermine la hauteur du Pole.

Quelque facile que soit cette méthode : que le Navigateur ne soit pas tenté de s'y arrêter lorsqu'il en pourra pratiquer d'autres plus exactes. Je ne la lui offre que pour des cas malheureux où il n'auroit point d'autre ressource.

Après l'observation du lever & du coucher des Astres, il n'y en a pas de plus simple, ni de plus facile, que celle du moment où ils se trouvent dans un même vertical. Dans un Observatoire stable, une Lunette fixée à angles droits sur un axe horizontal, & mobile autour de cet axe, donne ces observations avec une grande précision ; sur la Mer un fil chargé

d'un plomb ſuffit; & ſi l'on ſe vouloit contenter d'une moindre exactitude, on pourroit à la vûe ſimple juger aſſez juſte ſi la ligne qui joint deux Étoiles eſt verticale, ſur-tout ſi l'on choiſiſſoit deux Étoiles aſſez éloignées l'une de l'autre.

Je donne pour trouver la Latitude par des obſervations de cette eſpèce, une méthode qui peut être fort utile ſur Terre & ſur Mer.

J'ai déjà dit que l'ouvrage ſuivant n'étoit pas deſtiné uniquement pour les gens de Mer : on y trouvera pluſieurs Problèmes pour la perfection de l'Aſtronomie.

Tout le monde ſait, du moins tous les Aſtronomes ſavent que lorſqu'on veut déterminer la hauteur du Pole, on ſuppoſe connue la déclinaiſon de

l'Aſtre qu'on emploie à cette recherche ; & que lorſqu'on veut déterminer la déclinaiſon d'un Aſtre, on ſuppoſe connue la hauteur du Pole. La plûpart des méthodes pour trouver l'une ou l'autre de ces deux choſes, ſont dans le cas de ce cercle vicieux. On trouvera dans l'ouvrage ſuivant un Problème par lequel on l'évite ; on aura la hauteur du Pole indépendamment de la déclinaiſon des Aſtres ; la déclinaiſon des Aſtres indépendamment de la hauteur du Pole : & le tout ſe fera ſans la meſure actuelle d'aucun angle.

Depuis qu'on connoît la propriété qu'a l'Atmoſphère de rompre les rayons de la Lumière, & de nous faire voir les Aſtres dans des lieux où ils ne ſont point, tous les Aſtronomes

se sont appliqués à déterminer la hauteur du Pole par des méthodes qui évitassent l'effet de cette illusion ; quoiqu'il paroisse que jusqu'ici ce n'ait pas été avec grand succès. Les unes de ces méthodes supposent qu'on connoisse la déclinaison des E'toiles qu'on emploie à cette recherche ; & c'est cette déclinaison qu'il est difficile de trouver exempte des erreurs de la Réfraction. D'autres supposent l'observation d'une E'toile au Zénith, ce qui les limite extrêmement. On trouvera dans ce Livre un Problème où toutes ces suppositions sont évitées ; & qui met la hauteur du Pole, & la déclinaison des E'toiles à l'abri des effets de cette Réfraction.

Je dois maintenant parler de la méthode

méthode que j'ai ſuivie dans tout cet ouvrage.

Pour réſoudre les Problèmes aſtronomiques, on a d'ordinaire recours à une ſcience ſecondaire : on les réduit à des Triangles tracés ſur la ſurface de la Sphère, que cette ſcience apprend à réſoudre. Je parle de la Trigonométrie Sphérique : elle offre d'abord de grandes facilités. On trouve ſes règles à la tête de pluſieurs Livres ; & ſouvent on réſout des Queſtions importantes de l'Aſtronomie par une application aveugle de ces règles. Par elles on eſt diſpenſé de pénétrer dans la nature de la queſtion ; & par elles l'Aſtronome ſe croiroit diſpenſé d'être Géomètre, s'il pouvoit méconnoître la ſcience à laquelle elles doivent leur origine.

J'admire l'art des premiers Géomètres qui nous ont donné la Trigonométrie Sphérique : mais je crois que les Esprits géométriques préféreront, pour les Problèmes d'Astronomie, des solutions immédiates à celles qu'on emprunte d'une autre science; & auxquelles on ne parvient qu'en pratiquant des règles dont l'origine n'est guère présente à l'esprit, & dont l'application est souvent ambigue.

J'ai voulu délivrer l'Astronomie du besoin de cette science secondaire; & la faire dépendre immédiatement de l'analyse dont toutes les Sciences Mathématiques dépendent.

Je dois avouer qu'on trouvera dans la méthode que j'ai suivie, l'inconvénient qui se rencontre dans toutes les méthodes générales : c'est

de donner pour quelques cas particuliers des ſolutions moins ſimples & moins commodes que celles auxquelles on parviendroit par des routes indirectes. Mais je ne crois pas qu'on inſiſte ſur ce reproche, lorſqu'on fera attention à l'avantage d'avoir tous les Problèmes qui compoſent l'ouvrage ſuivant, réſolus par une même méthode & par un même calcul.

Après le grand nombre de choſes que j'ai annoncées, je crains de dire que tout eſt contenu dans quelques lignes d'Algèbre. Ai-je le tort d'avoir préſenté l'ouvrage d'une manière trop avantageuſe ? ou l'Algèbre a-t-elle le mérite d'avoir en effet réduit dans un ſi petit volume une ſcience très-vaſte ? c'eſt à ceux qui examineront l'ouvrage à en juger.

TABLE

DES PROBLEMES

Contenus dans cet ouvrage.

PRÉPARATION pour tout le Livre, ou dénomination des principaux élémens de la Sphère. Page 3

PROBLEME I. *Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur, & son Angle horaire!* 6

PROBLEME II. *Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, sa hauteur, & son Angle azymuthal!* 8

PROBLEME III. *Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal!* 12

PROBLEME IV. *Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal!* 10

PROBLEME V. *Trouver la relation entre la déclinaison d'un Astre, sa hauteur, son Angle horaire, & son Angle azymuthal!* 14

PROBLEME VI. *Trouver la relation entre la*

hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, & le temps qu'il emploie ſur l'horizon! 23

PROBLEME VII. *Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre & ſon Angle azymuthal, au moment de ſon lever ou de ſon coucher!* 25

PROBL. VIII. *Trouver la relation entre la déclinaiſon d'un Aſtre, l'Angle qu'il traverſe, & le temps qu'il emploie à le traverſer!* 26

PROBL. IX. *La hauteur du Pole, & la déclinaiſon d'un Aſtre étant données, trouver l'Azymuth que l'Aſtre touche dans ſa révolution!* 28

PROB. X. *La hauteur du Pole, & la déclinaiſon d'un Aſtre étant données, trouver la relation entre un petit changement dans ſa hauteur, & le temps qu'il y emploie!* 31

PROB. XI. *Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon du Soleil, le temps écoulé entre deux hauteurs égales de cet Aſtre, ſon changement en déclinaiſon pendant ce temps, & la différence des temps qu'il emploie, l'un à s'élever à la hauteur obſervée au Méridien, l'autre à deſcendre du Méridien à la même hauteur!* 35

PROB. XII. *Deux hauteurs d'un Aſtre étant données, trouver la relation entre le temps*

qui les ſépare, la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole! 41

PROBL. XIII. *Deux hauteurs d'un Aſtre étant données, trouver la relation entre l'Arc azymuthal qui les ſépare, la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole!* 47

PROBL. XIV. *Deux Angles horaires & deux Angles azymuthaux d'un Aſtre étant donnés, aux momens de ſes paſſages à deux verticaux, trouver la hauteur du Pole & la déclinaiſon de l'Aſtre!* 49

PROB. XV. *Deux Aſtres dont on connoît les déclinaiſons & les angles horaires, étant vûs dans un même vertical, trouver la hauteur du Pole!* 52

PROBL. XVI. *La hauteur du Pole étant connue, & deux Aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'obſervation!* 54

PROB. XVII. *Deux Aſtres dont on connoît les déclinaiſons, & les Angles horaires au moment de l'obſervation, étant vûs dans un même Almicantarath, trouver la hauteur du Pole!* 58

PROB. XVIII. *La hauteur du Pole étant connue, & deux Aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant*

vûs dans un même Almicantarath, trouver l'heure de l'observation ! 60

PROB. XIX. *Les déclinaisons & les ascensions droites de trois E'toiles étant données, & le temps écoulé entre les momens où l'une des trois se trouve dans un même vertical avec chacune des deux autres, trouver l'heure de l'observation, & la hauteur du Pole !* 64

PROB. XX. *Trois hauteurs d'un Astre étant données avec les deux intervalles de temps écoulés entre, trouver la déclinaison de l'Astre, & la hauteur du Pole !* 72

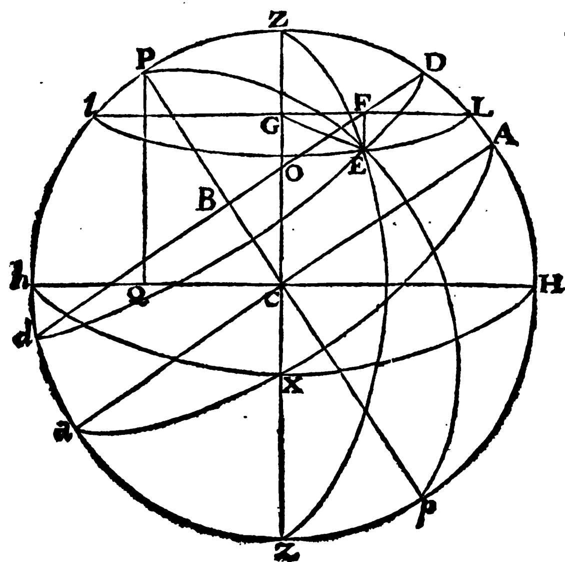
PROBL. XXI. *Les angles horaires de deux E'toiles qui passent par deux Almicantaraths & par deux Azymuths dont la position est inconnue, mais constante, étant donnés par les temps écoulés depuis les passages au Méridien jusqu'aux momens où elles coupent ces cercles, trouver la déclinaison de ces E'toiles & la hauteur du Pole !* 79

PROB. XXII. *La déclinaison du Soleil étant donnée, trouver sur Mer la hauteur du Pole par la durée du jour !* 84



ASTRONOMIE

ASTRONOMIE
NAUTIQUE.


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
H
Q
C
d
X
a
p
Z



PRÉPARATION POUR TOUT LE LIVRE,

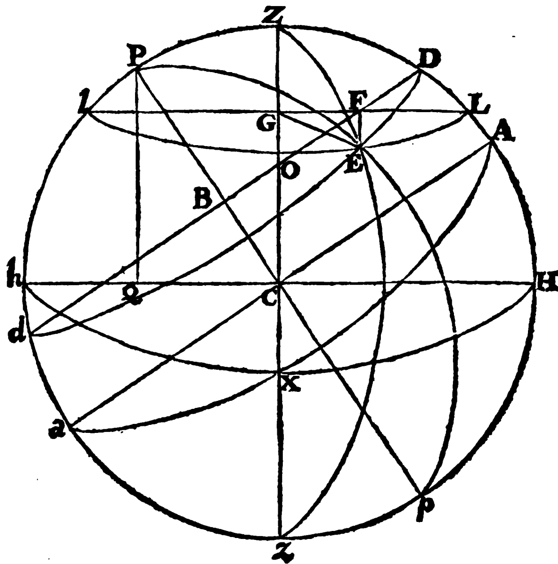
ou

Dénomination des principaux élémens de la Sphère.

SOIENT *Pp* l'Axe de la Sphère céleste: *PZAHpzahP* le Méridien, & *HXh* l'Horizon du lieu ; *AXa* l'Equateur, *DEd* le Cercle que décrit l'Astre, *PEp* le Méridien qui passe au point *E* où l'Astre se trouve, *ZEz* son Vertical, & *LEl* son Almicantarath.

Toutes les lignes suivantes sont dans l'Hémisphère élevé sur le plan du papier, & dont la commune section avec ce plan, est le Méridien *PZAHpzahP*.

SOIT le Rayon . . . $CP = r$	On aura
Le Sinus de la déclinaif. de l'Aftre. . . . . . . $CB = x$	$CO = \frac{rx}{s}$
Son Cofinus . . . . $BD = y$	$BO = \frac{cx}{s}$
Le Sinus de la hauteur du Pole. . . . . $PQ = s$	$GF = \frac{hn}{r}$
Son Cofinus . . . . $CQ = c$	$EF = \frac{km}{r}$
Le Sinus de la hauteur de l'Aftre . . . . . . $CG = h$	$BF = \frac{uy}{r}$
Son Cofinus . . . . $GE = k$	$EF = \frac{ty}{r}$
Le Sinus de l'Angle horaire DBE . . . . . . $= t$	
Son Cofinus . . . . $= u$	
Le Sinus de l'Angle azymuthal LGE . . . . . $= m$	
Son Cofinus . . . . $= n$	


Z
P
D
l
F
L
G
A
O
E
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z

PROBLEME I.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle horaire?

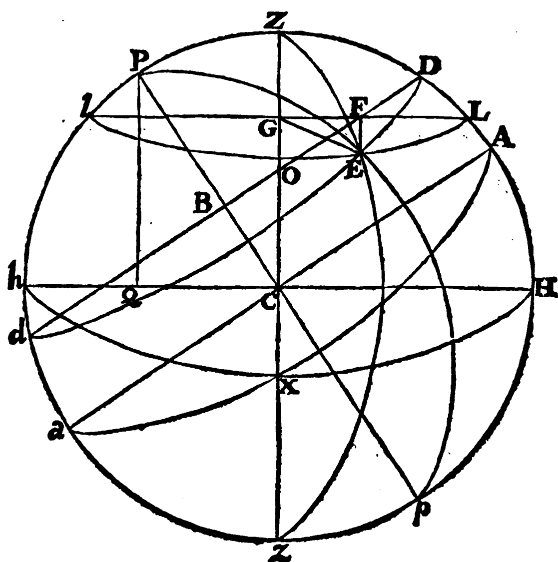
$GO = CG - CO = \frac{hs - rx}{s}$; & les Triangles ſemblables QCP, GOF, donnant

$$c : r :: \frac{hs - rx}{s} : FO = \frac{rhs - rrx}{cs}.$$

On a (à cauſe de $BO + OF = BF$)

$$\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r}; \text{ ou}$$

$$rrh - rsx = cyu.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
O
E
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z

PROBLEME II.

Trouver la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal!

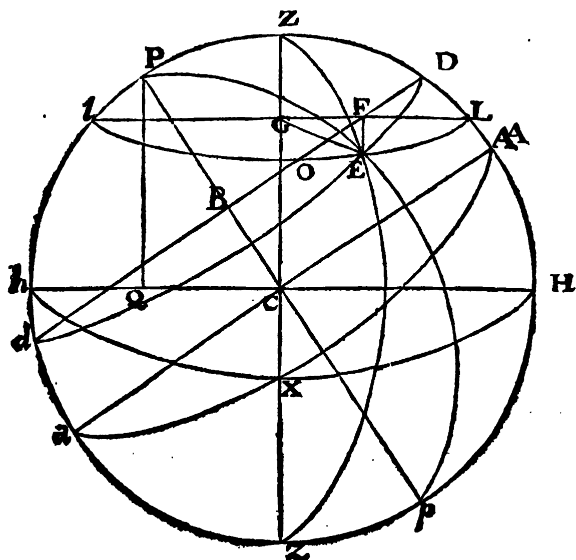
Les Triangles ſemblables *PQC, FGO,* donnent

$$s : c :: \frac{kn}{r} : GO = \frac{ckn}{rs}.$$

Donc (à cauſe de $CO + OG = CG$)

$$\frac{rrx + ckn}{rs} = h, \text{ ou}$$

$$rrx + ckn = rhs.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
O
E
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z

PROBLEME III.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaison d'un Astre, son Angle horaire, & son Angle azymuthal!

On a $m : n :: \frac{ty}{r} : FG = \frac{nty}{rm}$.

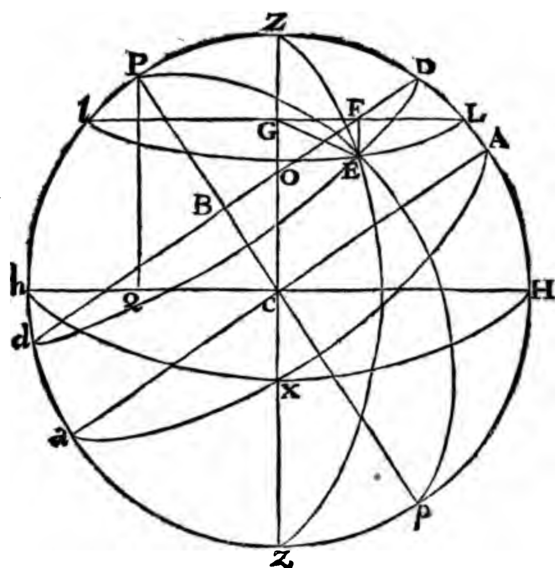
Les Triangles semblables *QPC, GFO*, donnent

$$s : r :: \frac{nty}{rm} : FO = \frac{nty}{ms}.$$

Donc (à cause de $FO + OB = FB$)

$$\frac{nty + cmx}{ms} = \frac{uy}{r}, \text{ ou}$$

$$rnty + rcmx = msuy.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
O
E
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
Z

PROBLEME IV.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal!

Les Triangles ſemblables *QPC, GFO,* donnent

$$s : r :: \frac{kn}{r} : FO = \frac{kn}{s},$$

$$s : c :: \frac{kn}{r} : GO = \frac{ckn}{rs};$$

$$\& \ CO = \frac{rhs - ckn}{rs}.$$

Les Triangles ſemblables *PCQ, COB,* donnent

$$r : c :: \frac{rhs - ckn}{rs} : OB = \frac{rchs - cckn}{rrs};$$

Or $FO + OB : EF$, ou

$$\frac{rrkn + rchs - cckn}{rrs} : \frac{km}{r} :: u : t. \text{ Donc}$$

$$rcht + knst = rkmu.$$

SOIT le Rayon . . . $CP = r$

Le Sinus de la déclinaif. de l'Aftre. . . . . . . $CB = x$

Son Cofinus . . . . $BD = y$

Le Sinus de la hauteur du Pole. . . . . $PQ = s$

Son Cofinus . . . . $CQ = c$

Le Sinus de la hauteur de l'Aftre . . . . . . $CG = h$

Son Cofinus . . . . $GE = k$

Le Sinus de l'Angle horaire DBE . . . . . . $= t$

Son Cofinus . . . . $= u$

Le Sinus de l'Angle azymuthal LGE . . . . . $= m$

Son Cofinus . . . . $= n$

On aura

$CO = \frac{rx}{s}$

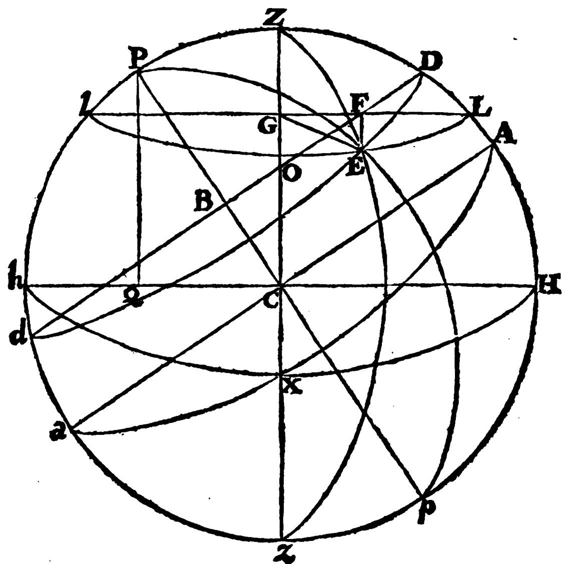
$BO = \frac{cx}{s}$

$GF = \frac{kn}{r}$

$EF = \frac{km}{r}$

$BF = \frac{uy}{r}$

$EF = \frac{ty}{r}$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
H
C
d
X
a
p
z

PROBLEME I.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle horaire?

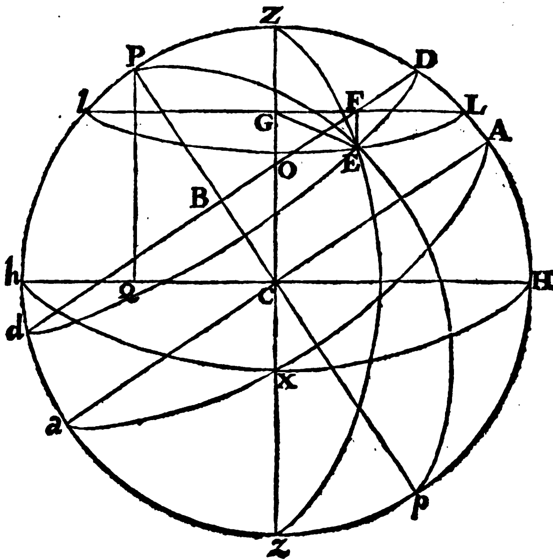
$GO = CG - CO = \frac{hs - rx}{s}$; & les Triangles ſemblables QCP, GOF, donnant

$$c : r :: \frac{hs - rx}{s} : FO = \frac{rhs - rrx}{cs}.$$

On a (à cauſe de $BO + OF = BF$)

$$\frac{ccx + rhs - rrx}{cs} = \frac{yu}{r} : \text{ ou}$$

$$rrh - rsx = cyu.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
z

PROBLEME II.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal!

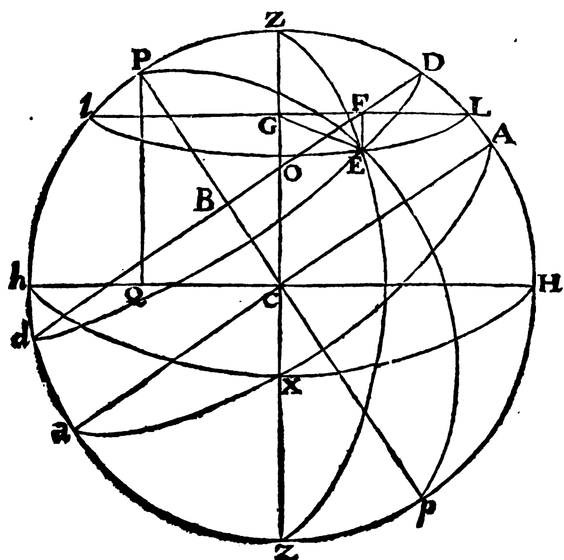
Les Triangles ſemblables PQC, FGO, donnent

$$s : c :: \frac{kn}{r} : GO = \frac{ckn}{rs}.$$

Donc (à cauſe de $CO + OG = CG$)

$$\frac{rrx + ckn}{rs} = h, \text{ ou}$$

$$rrx + ckn = rhs.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
H
Q
C
d
X
a
p
Z

PROBLEME III.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal!

On a $m : n :: \frac{ty}{r} : FG = \frac{nty}{rm}$.

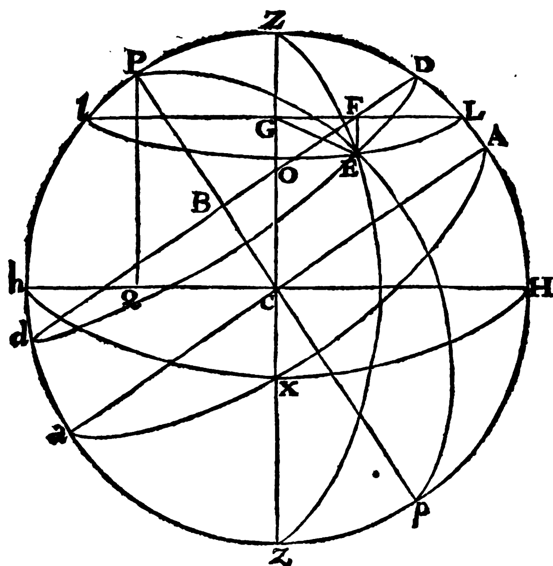
Les Triangles ſemblables *QPC, GFO*, donnent

$$s : r :: \frac{nty}{rm} : FO = \frac{nty}{ms}.$$

Donc (à cauſe de $FO + OB = FB$)

$$\frac{nty + cmx}{ms} = \frac{uy}{r}, \text{ ou}$$

$$rnty + rcmx = msuy.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
E
O
B
h
♌
C
H
d
X
a
p
z

PROBLEME IV.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la hauteur d'un Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal!

Les Triangles ſemblables QPC, GFO, donnent

$$s : r :: \frac{kn}{r} : FO = \frac{kn}{s},$$

$$s : c :: \frac{kn}{r} : GO = \frac{ckn}{rs};$$

$$\& \ CO = \frac{rhs - ckn}{rs}.$$

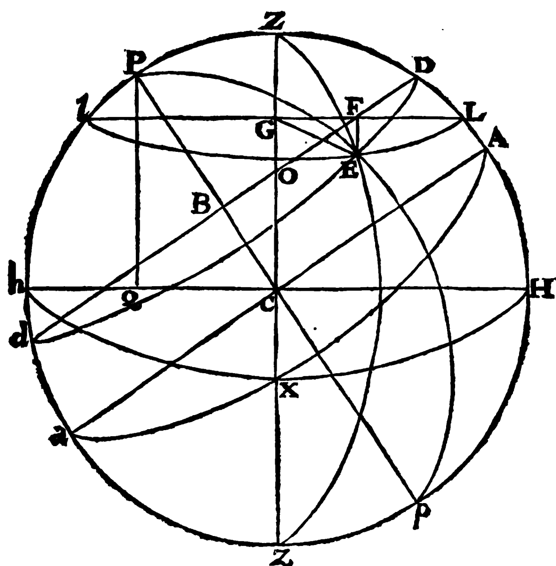
Les Triangles ſemblables PCQ, COB, donnent

$$r : c :: \frac{rhs - ckn}{rs} : OB = \frac{rchs - cckn}{rrs};$$

Or $FO + OB : EF$, ou

$$\frac{rrkn + rchs - cckn}{rrs} : \frac{km}{r} :: u : t.$$ Donc

$$rcht + knst = rkmu.$$


Z
P
D
l
F
L
G
A
O
E
B
h
Q
C
H
d
X
a
p
Z

PROBLEME V.

TROUVER la relation entre la déclinaiſon d'un Aſtre, ſa hauteur, ſon angle horaire, & ſon Angle azymuthal?

La commune ſection de l'Almicantarath, & du Cercle que décrit l'Aſtre, donne

$$\frac{km}{r} = \frac{ty}{r} : \text{ou}$$

$$km = ty.$$

SCHOLIE.

Ces cinq Formules donnent toutes les relations poſſibles entre les cinq Elémens qui entrent dans ces Problèmes. Mais dans l'Hémiſphère que nous avons conſidéré, la poſition de quelques-unes de ces lignes peut varier ; & ces lignes alors changent de ſigne. Les trois qui ſont ſujettes à changer de poſition, ſont n, u & x.

La déclinaiſon étant vers le Pole élevé.

I.

L'Aſtre étant vers le Méridien ſupérieur ; l'Azymuth tombant vers le Pole abaiſſé ; n, u & x conſervent leur poſition.

Les Formules ſont

$$rrh - rsx = cuy.$$
$$rrx + ckn = rhs.$$
$$rnty + rcmx = msuy.$$
$$rcht + knst = rkmu.$$
$$km = ty.$$

I I.

L'Aſtre étant vers le Méridien ſupérieur ; l'Azymuth vers le Pole élevé ; *n* change de poſition.

Les Formules ſont

$$rrh - rsx = cuy.$$
$$rrx - ckn = rhs.$$
$$- rnty + rcmx = msuy.$$
$$rcht - knst = rkmu.$$
$$km = ty.$$

I I I.

L'Aſtre étant vers le Méridien inférieur ; l'Azymuth vers le Pole élevé ; *n* & *u* changent de poſition.

Les Formules ſont

$$rrh - rsx = - cuy.$$
$$rrx - ckn = rhs.$$
$$- rnty + rcmx = - msuy.$$
$$rcht - knst = - rkmu.$$
$$km = ty.$$

La

La déclinaiſon étant vers le Pole abaiſſé.

I V.

L'Aſtre eſt toûjours vers le Méridien ſupérieur ; l'Azymuth toûjours vers le Pole abaiſſé ; x ſeul change de poſition.

Les Formules ſont

$$rrh + rsx = cuy.$$
$$-rrx + ckn = rhs.$$
$$rnty - rcmx = msuy.$$
$$rcht + knst = rkmu.$$
$$km = ty.$$

Tout ceci ſe paſſe dans l'Hémiſphère élevé ſur le plan du papier, terminé par le Méridien *PZAHpzahP*. Si dans quelques-uns des Problèmes ſuivans, on emploie des lignes de l'autre Hémiſphère, quelques lettres qui ſont invariables dans un ſeul Hémiſphère varieront ; comme m & t, qui étant poſitives dans l'un, ſeroient négatives dans l'autre.

Ces cinq Formules contiennent les vingt Problèmes ſuivans.

PAR LA 1.re FORMULE:

$rrh * rsx = * cuy.$

Sans connoître l'Angle azymuthal.

1.

Connoissant la déclinaison de l'Astre, sa hauteur & son Angle horaire, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoissant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Astre, & son Angle horaire, on a sa déclinaison.

3.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & sa hauteur, on a son Angle horaire.

4.

Connoissant la hauteur du Pole, la déclinaison de l'Astre, & son Angle horaire, on a sa hauteur.

PAR LA 2.de FORMULE:

*rrx * ckn = rhs.*

Sans connoître l'Angle horaire.

1.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſa hauteur, on a ſon Angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſa hauteur.

PAR LA 3.me FORMULE:

*rnty * rcmx = *msuy.*

Sans connoître la hauteur de l'Aſtre.

1.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoiſſant la hauteur du Pole, l'Angle horaire de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

3.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſon Angle horaire.

4.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſon Angle horaire, on a ſon Angle azymuthal.

PAR LA 4.me FORMULE;

*rcht * knst = *rkmu.*

Sans connoître la déclinaiſon de l'Aſtre.

1.

Connoiſſant la hauteur de l'Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal, on a la hauteur du Pole.

2.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſon Angle horaire.

3.

Connoiſſant la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, & ſon Angle horaire, on a ſon Angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la hauteur du Pole, l'Angle horaire de l'Aſtre, & ſon Angle azymuthal, on a ſa hauteur.

PAR LA 5.me FORMULE,

$$km = ty,$$

Sans connoître la hauteur du Pole.

1.

Connoiſſant la hauteur de l'Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal, on a ſa déclinaiſon.

2.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle azymuthal, on a ſon Angle horaire.

3.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſa hauteur, & ſon Angle horaire, on a ſon Angle azymuthal.

4.

Connoiſſant la déclinaiſon de l'Aſtre, ſon Angle horaire, & ſon Angle azymuthal, on a ſa hauteur.

PROBLEME VI.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre, & le temps qu'il emploie ſur l'horizon?

Ceci n'eſt qu'une limitation des uſages de notre 1.re Formule : car y faiſant $h = 0$, puiſque l'arc qu'on cherche eſt terminé par l'horizon : l'on a

$$rsx = cuy.$$

On calcule par-là facilement les arcs que les Aſtronomes appellent *ſemi-diurnes.*

On pourroit par-là déterminer la déclinaiſon des Aſtres.

On pourroit auſſi trouver la hauteur du Pole.

Moyen pour trouver la Réfraction horizontale.

L'Equation $u = \frac{rsx}{cy}$, donnant le moment où le centre du Soleil eſt dans l'horizon, ſi dans ce moment on obſerve ſa hauteur apparente, cette hauteur donnera la quantité de la réfraction horizontale affectée de la parallaxe horizontale du Soleil : & l'effet de la réfraction étant d'élever l'image du Soleil, pendant que l'effet de la parallaxe eſt de l'abaiſſer, ſi l'on retranche de la hauteur du centre du Soleil ſa parallaxe, le reſte ſera la quantité de la réfraction. Mais la parallaxe du Soleil étant fort peu conſidérable par rapport à la réfraction horizontale, elle peut être négligée dans les Problèmes, qui ne demandent pas la dernière exactitude.

PROBLEME VII.

TROUVER *la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon d'un Aſtre & ſon Angle azymuthal, au moment de ſon lever ou de ſon coucher?*

Ceci n'eſt qu'une limitation de la 2.de formule, qui dans le cas où l'Aſtre eſt dans l'horizon & $h = o$, donne

$$rx = cn.$$

On calcule par-là facilement les Amplitudes ortives ou occaſes, par où l'on trouve la déclinaiſon de l'Aiguille aimantée.

On pourroit déterminer la déclinaiſon des Aſtres qui ſe lèvent & ſe couchent.

Enfin l'on pourroit trouver la hauteur du Pole.

PROBLEME VIII.

Trouver la relation entre la déclinaiſon d'un Aſtre, l'Angle qu'il traverſe, & le temps qu'il emploie à le traverſer!

Soit le ſinus de la moitié de l'angle $= p$ pour le rayon $= r$; & ſuppoſant qu'on obſerve l'Aſtre à diſtances égales du Méridien, on aura

$r : m :: k : p$; & $km = rp$. Par la 5.me formule on a $km = ty$;
Donc $rp = ty$.

Or, à quelque diſtance du Méridien qu'on obſerve un Aſtre traverſer un angle donné, le temps qu'il y emploie (en négligeant l'effet de la réfraction) eſt toûjours le même: on aura donc toûjours

$$rp = ty.$$

Scholie. On peut par ce Problème,

Déterminer la déclinaiſon d'un Aſtre,

par l'Angle qu'il traverſe & par le temps qu'il emploie à le traverſer.

Déterminer le temps par l'Angle traverſé & par la déclinaiſon de l'Aſtre.

Déterminer l'Angle par le temps employé à le traverſer & par la déclinaiſon de l'Aſtre.

PROBLEME IX.

La hauteur du Pole, & la déclinaiſon d'un Aſtre étant données, trouver l'Azymuth que l'Aſtre touche dans ſa révolution!

Tous les Aſtres qui paſſent entre le Zénith & le Pole ont deux momens, l'un avant, l'autre après leur paſſage par le Méridien, où leur cours eſt perpendiculaire à l'horizon, & commun au Cercle qu'ils décrivent, & au Cercle azymuthal. Voici la manière de trouver ces points:

L'Angle azymuthal qui répond à chaque point du Cercle que décrit l'Aſtre, croît juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu à cette partie commune aux deux Cercles; & décroît auſſi-tôt après. L'Angle azymuthal qui convient à cette partie du cours de l'Aſtre, eſt donc alors le plus grand qu'il puiſſe être.

Dans ce cas, la 2.de formule eſt

$$rrx - ckn = rhs;$$

Dans laquelle prenant la valeur de $n = \frac{rrx - rhs}{ck}$, la différentiant en faiſant c, x & s conſtans, & faiſant la différence $= 0$, l'on a pour la hauteur qui convient au point qu'on cherche, $h = \frac{rs}{x}$; &, ſubſtituant cette valeur de h dans la Formule, on trouve

$$n = \frac{r\sqrt{(xx - ss)}}{c}.$$

Moyen pour trouver la Réfraction.

Scholie. On tire du Problème précédent, un moyen pour déterminer les réfractions que les Aſtres éprouvent à différentes hauteurs. Car ſi dans la 5.me formule $km = ty$, on ſubſtitue les valeurs de k & de m qui conviennent au point où l'Aſtre tombe, ou s'élève perpendiculaire-

ment à l'horizon, l'on a l'inſtant où cela arrive : l'on a auſſi la hauteur à laquelle il eſt dans cet inſtant : comparant donc à cette hauteur, la hauteur obſervée, leur différence eſt la réfraction.

PROBLEME X.

La hauteur du Pole, & la déclinaiſon d'un Aſtre étant données, trouver la relation entre un petit changement dans ſa hauteur, & le temps qu'il y emploie!

La 1.re formule peut avoir ces trois formes,

$$rrh - rsx = cuy,$$
$$rrh - rsx = -cuy,$$
$$rrh + rsx = cuy.$$

Et pendant que l'Aſtre s'élève ou s'abaiſſe, comme il n'arrive de changement qu'à h & u, l'on a en différentiant

$$rrdh = cydu.$$

Pour réduire les différentielles dh & du, aux petits arcs du vertical & de l'Equateur, on a $dh = \frac{k}{r}\, dV$; & $du = \frac{t}{r}\, dE$, qui, ſubſtitués dans l'Equation précédente, donnent

$$rrkdV = ctydE.$$

Ou à cauſe que dans l'horizon, $k = r$, & $t = \frac{rr}{cy} \sqrt{(yy - ss)}$,

$$rdV = \sqrt{(yy - ss)}\, dE.$$

Scholie. Ce Problème eſt utile pour corriger les hauteurs des Aſtres, lorſqu'on n'a pas pû faire les obſervations dans l'inſtant où elles devoient être faites.

On peut auſſi par ce Problème, *trouver la durée du lever ou du coucher du Soleil;* c'eſt-à-dire, trouver le temps que le Soleil emploie à s'élever ou à s'abaiſſer à l'horizon de tout ſon diſque.

Car ſi l'on conſidère le diamètre du Soleil comme une aſſez petite quantité par rapport aux lignes qui entrent dans ce calcul, on pourra le prendre pour dV; & l'on aura la durée du lever ou du coucher du Soleil par l'équation

$$dE = \frac{r}{\sqrt{(yy - ss)}}\, dV.$$

D'où l'on voit, que lorſque la hauteur du Pole ſurpaſſe la codéclinaiſon du Soleil, la

la durée du lever ou du coucher de cet Aſtre eſt imaginaire : en effet le Soleil alors eſt toûjours ſur l'horizon.

Si le diamètre du Soleil eſt une quantité trop conſidérable par rapport aux autres lignes qui entrent dans ce calcul, & que cette expreſſion de la durée du lever ou du coucher du Soleil ne ſoit pas aſſez exacte pour les uſages auxquels on la deſtine; l'on en trouvera une à laquelle il ne manque rien, dans le Problème XII.

Trouver la hauteur du Pole par la durée du lever ou du coucher du Soleil!

Le calcul précédent, donne

$$s = \sqrt{(yy - rr \frac{dV^2}{dE^2})}.$$

Il eſt évident que la réfraction, quelque grande qu'elle ſoit, n'apporte ici aucune erreur, pourvû ſeulement qu'elle demeure la même pendant l'obſervation; ce qu'on peut bien prendre pour vrai, vû le peu de temps qu'elle dure; car la réfraction

ne fait ici que tranſporter l'horizon un peu plus haut qu'il n'eſt, ou le changer dans un almicantarath fort peu élevé : & le temps que le Soleil emploie à s'élever au deſſus de cet almicantarath, ou à s'abaiſſer au deſſous, ne diffère pas ſenſiblement du temps qu'il emploie à s'élever de la même quantité au deſſus du véritable horizon, ou à s'abaiſſer au deſſous.

On pourroit ainſi par l'obſervation la plus ſimple, connoiſſant la grandeur apparente du diamètre du Soleil, & la déclinaiſon de cet Aſtre, trouver ſurmer à peu près la hauteur du Pole. Quoique je ne donne pas ceci comme une méthode à employer lorſqu'on peut en pratiquer de plus exactes, il arrive dans la Navigation des accidens ſi étranges, qu'on pourroit être heureux d'y avoir recours. Et il eſt toûjours utile au Navigateur de connoître toutes les reſſources de ſon Art, chacune avec le degré de ſûreté qu'elle comporte, afin qu'il puiſſe s'en ſervir dans le beſoin.

PROBLEME XI.

TROUVER la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon du Soleil, le temps écoulé entre deux hauteurs égales de cet Aſtre, ſon changement en déclinaiſon pendant ce temps, & la différence des temps qu'il emploie, l'un à s'élever de la hauteur obſervée au Méridien, l'autre à deſcendre du Méridien à la même hauteur!

La 1.re formule peut avoir ces trois formes, ſelon la hauteur du Pole, le lieu du Soleil, & l'heure des obſervations :

$$rrh - rsx = cuy.$$
$$rrh - rsx = - cuy.$$
$$rrh + rsx = cuy.$$

Dans ce Problème, pendant que c, s & h demeurent les mêmes, u, x & y varient.

1.° La déclinaiſon du Soleil étant vers le Pole élevé, le Soleil vers le Méridien ſupérieur, x croiſſant, u diminue : c'eſt le

cas de la 1.re forme; & différentiant, on a

$$rsdx = cudy + cydu.$$

2.° La déclinaiſon étant vers le Pole élevé, le Soleil vers le Méridien inférieur, x croiſſant, u croît: c'eſt le cas de la 2.de forme; & différentiant, on a

$$rsdx = -cudy + cydu.$$

3.° La déclinaiſon étant vers le Pole abaiſſé, le Soleil eſt toûjours vers le Méridien ſupérieur, x croiſſant, u croît: c'eſt le cas de la 3.me forme; & différentiant, on a

$$rsdx = -cudy + cydu.$$

Pour réduire les différentielles dx, dy, du aux petits arcs du Méridien & de l'Equateur; nommant dD le petit arc du Méridien qui eſt la différence en déclinaiſon, & dE le petit arc de l'Equateur qui exprime la différence des temps; on a $dx = \frac{y}{r}\,dD$, $dy = \frac{x}{r}\,dD$, &

$du = \frac{t}{r}\, dE$; qui, ſubſtitués dans les Equations précédentes, donnent

$$1.^{\circ}\; dE = \left(\frac{rs}{ct} - \frac{xu}{ty}\right) dD.$$

$$2.^{\circ}\; dE = \left(\frac{rs}{ct} + \frac{xu}{ty}\right) dD.$$

$$3.^{\circ}\; dE = \left(\frac{rs}{ct} + \frac{xu}{ty}\right) dD.$$

Ou (mettant les tangentes S, T, X à la place des ſinus)

$$1.^{\circ}\; dE = \left(\frac{S}{t} - \frac{X}{T}\right) dD.$$

$$2.^{\circ}\; dE = \left(\frac{S}{t} + \frac{X}{T}\right) dD.$$

$$3.^{\circ}\; dE = \left(\frac{S}{t} + \frac{X}{T}\right) dD.$$

On peut tirer de ce Problème pluſieurs uſages utiles ou curieux, ou plûtôt il contient cinq Problèmes qu'indique & que réſout la ſeule inſpection de notre Equation; car des cinq quantités qu'elle contient, quatre étant données, déterminent la cinquième.

Correction du Midi.

L'un des Problèmes précédens eſt de grand uſage dans l'Aſtronomie. Pour régler leur Horloge, les Aſtronomes obſervent quelques hauteurs du Soleil avant midi, & les inſtans de ces hauteurs; après midi ils obſervent les mêmes hauteurs, & les inſtans où le Soleil s'y trouve. Si la déclinaiſon du Soleil demeuroit toûjours la même, en partageant en deux également les intervalles du temps écoulé entre chacune des hauteurs correſpondantes, le milieu ſeroit l'inſtant où le Soleil auroit paſſé au Méridien, c'eſt-à-dire l'inſtant du midi : on trouve ainſi l'inſtant de la culmination des Etoiles fixes; car le changement en déclinaiſon qu'elles éprouvent dans l'intervalle des obſervations n'eſt pas ſenſible.

Il n'en eſt pas ainſi du Soleil, ſa déclinaiſon change aſſez conſidérablement dans

l'intervalle des obſervations, pour que l'inſtant auquel il paſſe au Méridien ne ſoit pas également éloigné des inſtans auxquels il paſſe aux mêmes hauteurs. Dès que le Soleil s'approche de notre zénith, c'eſt-à-dire, lorſqu'il eſt dans les ſignes aſcendans, il arrive après midi à la même hauteur où il a été vû le matin, plus tard qu'il n'auroit fait ſi ſa déclinaiſon n'avoit pas changé; s'il retourne dans les ſignes deſcendans, il y arrive plûtôt. Le milieu du temps écoulé entre les hauteurs correſpondantes ne répond donc pas exactement à midi; il faut, lorſque le Soleil s'approche de notre zénith, en retrancher quelque choſe; & lorſque le Soleil s'en éloigne, il faut y ajoûter quelque choſe pour que cette moitié réponde à l'inſtant du midi: ce qu'il faut retrancher ou ajoûter, que les Aſtronomes appellent *la correction du midi,* eſt le petit intervalle entre l'inſtant où le Soleil ſe trouve à la hauteur obſervée,

& celui où il ſeroit à la même hauteur ſi ſa déclinaiſon n'avoit pas changé.

Les Aſtronomes n'obſervent leurs hauteurs correſpondantes, que peu d'heures avant & après midi, & jamais lorſque le Soleil eſt vers le Méridien inférieur; parce qu'alors trop peu élevé ſur l'horizon, il eſt expoſé à l'irrégularité des réfractions horizontales. Nous avons cependant ſuppoſé ce cas, parce qu'il ſe trouvoit dans le Problème général.

PROBLEME XII.

Deux hauteurs d'un Aſtre étant données, trouver la relation entre le temps qui les ſépare, la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole!

La 1.re formule donne deux Equations entre la hauteur du Pole, la hauteur de l'Aſtre, ſa déclinaiſon, & ſon angle horaire pour les momens des deux obſervations.

L'intervalle étant donné, ou le ſinus de l'arc qui lui répond, on a une Equation entre ce ſinus & les ſinus des deux angles horaires.

Par ces trois Equations, chaſſant les deux angles horaires, on a une Equation qui donne la relation entre le temps qui ſépare les hauteurs, la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole.

Exemple. Soit obſervé un Aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le Pole élevé, dans

deux hauteurs vers le Méridien ſupérieur, toutes deux après le paſſage au Méridien, l'arc qui répond au temps écoulé entre les obſervations ne ſurpaſſant pas le Quart-de-cercle.

Les deux hauteurs étant h & h'; & les coſinus des angles horaires étant u & u': la 1.re formule donne

$$u = \frac{rrh - rsx}{cy},$$

$$u' = \frac{rrh' - rsx}{cy}.$$

Et le ſinus du temps écoulé entre les deux obſervations, étant p, ſon coſinus q, & ſon ſinus verſe o; l'on a *

$$ru = p\sqrt{(rr - u'u')} + qu'.$$

Et chaſſant de ces E'quations u & u'; l'on a

$$\left.\begin{array}{l} oossxx - 2\,rrhosx \\ + rrppss - 2\,rrh'osx \\ + rrppxx \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} r^4pp \\ + r^3qhh' \\ - r^4hh \\ - r^4h'h'. \end{array}\right.$$

Dans cette E'quation, s & x ſont combinés de la même manière.

* *Voyez les Théorèmes mis à la fin de cet ouvrage.*

I. Si la déclinaiſon de l'Aſtre, & le temps écoulé entre les deux obſervations ſont connus, & qu'on cherche la hauteur du Pole : ordonnant cette Equation par rapport à *s;* l'on a

$$\left.\begin{matrix} +ooxx \\ +rrpp \end{matrix}\right\} ss \left\{\begin{matrix} -2rrhox \\ -2rrh'ox \end{matrix}\right\} s = \left\{\begin{matrix} +r^4pp \\ +2r^3qhh' \\ -r^4hh \\ -r^4h'h' \\ -rrppxx. \end{matrix}\right.$$

Ou (faiſant $ooxx + rrpp = A;$ $rhox + rh'ox = B;$ & $rrpp + 2rqhh' - rrhh - rrh'h' - ppxx = C$):

$$ss - 2r\frac{B}{A}s = rr\frac{C}{A}. \text{ Et}$$

$$s = r\frac{B}{A} \pm \frac{r}{A}\sqrt{(BB + AC)}.$$

Corollaire. Si l'Aſtre eſt dans l'Equateur, $x = 0$, & l'on a pour la hauteur du Pole

$$s = \frac{r}{p}\sqrt{(pp + \frac{2qhh'}{r} - hh - h'h')}.$$

II. Si la hauteur du Pole, & le temps écoulé entre les deux obſervations, ſont

connus, & qu'on cherche la déclinaiſon de l'Aſtre; l'on a

$$\left.\begin{matrix} +ooss \\ +rrpp \end{matrix}\right\} xx \left\{\begin{matrix} -2rrhos \\ -2rrh'os \end{matrix}\right\} x = \left\{\begin{matrix} +r^4pp \\ +2r^3qhh' \\ -r^4hh \\ -r^4h'h' \\ -rrppss. \end{matrix}\right.$$

Ou (faiſant $ooss + rrpp = A$; $rhos + rh'os = B$; & $rrpp + 2rqhh' - rrhh - rrh'h' - ppss = C$):

$$xx - 2r\frac{B}{A}x = rr\frac{C}{A}. \text{ Et}$$

$$x = r\frac{B}{A} \pm \frac{r}{A}\sqrt{(BB + AC)}.$$

Corollaire. Si l'obſervateur eſt ſous l'Equateur, $s = o$; & l'on a pour la déclinaiſon de l'Aſtre

$$x = \frac{r}{p}\sqrt{(pp + \frac{2qhh'}{r} - hh - h'h')}.$$

III. Si la déclinaiſon de l'Aſtre & la hauteur du Pole ſont connus, & qu'on cherche le temps écoulé entre les deux hauteurs de l'Aſtre; ordonnant l'Equation par rapport à q, l'on a

$$ccyyqq \left.\begin{array}{l} -2rssxx \\ -2r^3hh' \\ +2rrhsx \\ +2rrh'sx \end{array}\right\} q = \left\{\begin{array}{l} -r^4yy \\ +r^4ss \\ -2r^3hsx \\ -2r^3h'sx \\ +r^4hh \\ +r^4h'h' \\ +rrssxx \end{array}\right.$$

Ou (faisant $ccyy = D$; $ssxx + rrhh' - rhsx - rh'sx = E$; & $-rryy + rrss - 2rhsx - 2rh'sx + rrhh + rrh'h' + ssxx = F$):

$$qq - 2r\frac{E}{D}q = rr\frac{F}{D}. \text{ Et}$$

$$q = \frac{rE}{D} \pm \frac{r}{D}\sqrt{(EE + DF)}.$$

Scholie. Ce Problème eſt d'une grande utilité ſur la Terre, & encore plus ſur la Mer, où il enſeigne à trouver la hauteur du Pole lorſqu'on n'a pas pû obſerver les Aſtres au Méridien. Il donne auſſi l'heure de l'obſervation, ſi l'on a l'aſcenſion droite de l'Aſtre; car ſubſtituant les valeurs de s & de x dans l'une des deux Equations $u = \frac{rrh - rsx}{cy}$, on a l'angle horaire de

l'Aſtre au moment de l'obſervation : & y ajoûtant ou en ſouſtrayant la différence d'aſcenſion droite de cet Aſtre & du Soleil, on a l'heure.

On a par ce Problême le temps qu'un Aſtre emploie à s'élever ou à s'abaiſſer d'une quantité donnée, & l'on peut par-là déterminer exactement la durée du lever ou du coucher du Soleil ; car cette durée, telle que nous l'avons donnée *(Probl. X)* ne ſeroit pas aſſez exacte dans les lieux où le cours du Soleil eſt fort oblique.

PROBLEME XIII.

Deux hauteurs d'un Aſtre étant données, trouver la relation entre l'Arc azymuthal qui les ſépare, la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole !

La 2.de formule donne deux Equations entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, & ſon angle azymuthal pour les momens des deux obſervations.

La différence ou la ſomme des angles azymuthaux étant donnée, ou le ſinus de l'arc azymuthal qui ſépare les deux hauteurs, on a une Equation entre ce ſinus & les ſinus des deux angles azymuthaux.

Par ces trois Equations, chaſſant les deux angles azymuthaux, on a une Equation qui donne la relation entre l'arc azymuthal qui ſépare les hauteurs, la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole.

Exemple. Soit obſervé un Aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le Pole élevé, dans deux hauteurs vers le Méridien ſupérieur,

toutes deux après le passage au Méridien, les azymuths tombant du côté opposé au Pole élevé; la différence des angles azymuthaux ne surpassant pas le Quart-de-cercle.

Les deux hauteurs étant h & h', leurs cosinus k & k'; & les deux cosinus des angles azymuthaux étant n & n'; la 2.de formule donne

$$n = \frac{rhs - rrx}{ck},$$

$$n' = \frac{rh's - rrx}{ck'}.$$

Et le sinus de la différence azymuthale entre les deux hauteurs, étant p, & son cosinus q; l'on a *

$$rn = p\sqrt{(rr - n'n')} + qn.$$

Et chassant de cette Equation n & n', par les deux Equations de la formule; on a

$$\begin{array}{lll} r^4kkxx & & \\ + r^4k'k'xx & - 2r^3hk'k'sx & \\ - 2r^3qkk'xx & + 2rrqhkk'sx & - rrppkkk'k' = 0. \\ + rrhhk'k'ss & - 2r^3h'kksx & \\ + ppkkk'k'ss & + 2rrqh'kk'sx & \\ + rrh'h'kkss & & \\ - 2rqhh'kk'ss & & \end{array}$$

* *Voyez les Théorémes à la fin de cet ouvrage.*

PROBLEME

PROBLEME XIV.

Deux angles horaires & deux angles azymuthaux d'un Aſtre étant donnés, aux momens de ſes paſſages à deux verticaux, trouver la hauteur du Pole & la déclinaiſon de l'Aſtre!

La 3.me formule donne deux Equations entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal, pour les momens des deux obſervations: chaſſant donc la déclinaiſon, l'on a une Equation dans laquelle il n'y a plus d'inconnue que la hauteur du Pole. Et la hauteur du Pole ainſi connue, en la ſubſtituant dans l'une des deux premières Equations, on a la déclinaiſon de l'Aſtre.

Exemple. Soit obſervé un Aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le Pole élevé, dans deux verticaux vers le Méridien ſupérieur, tous deux après le paſſage au Méridien,

les azymuths tombant du côté opposé au Pole élevé.

Les sinus & cosinus des angles horaires étant $t, u,$ & t', u'; & les sinus & cosinus des angles azymuthaux étant $m, n,$ & m', n'; la 3.me formule donne

$$rnty + rcmx = msuy;$$
$$ru't'y + rcm'x = m'su'y.$$

Ou (faisant la tangente de la déclinaison de l'Astre $\frac{rx}{y} = X$; & les cotangentes des angles azymuthaux $\frac{rn}{m} = N, \frac{rn'}{m'} = N'$):

$$cX = su - Nt; \text{ \& } cX = su' - N't'.$$

Ou $su - Nt = su' - N't'$.

D'où l'on tire pour la hauteur du Pole:

$$s = \frac{Nt - N't'}{u - u'};$$

Mettant ensuite cette valeur de s dans l'une des deux premières Equations; l'on

a pour la déclinaiſon de l'Aſtre

$$X = \frac{Ntu' - N't'u}{\sqrt{[(ru - ru')^2 - (Nt - N't')^2]}}.$$

Cette méthode, pour trouver la hauteur du Pole & la déclinaiſon des Aſtres, eſt exempte des défauts que la réfraction apporte dans toutes les autres.

PROBLEME XV.

Deux Aſtres dont on connoît les déclinaiſons & les angles horaires, étant vûs dans un même vertical, trouver la hauteur du Pole!

La 3.me formule donne deux Equations entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de chaque Aſtre, ſon angle horaire, & ſon angle azymuthal pour le moment de l'obſervation : chaſſant par ces Equations l'angle azymuthal qui eſt le même dans l'une & dans l'autre, l'on a une Equation dans laquelle il n'y a plus d'inconnue que la hauteur du Pole.

Exemple. Soient obſervés dans un même vertical, deux Aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le Pole élevé, vers le Méridien ſupérieur, tous deux après leur paſſage au Méridien; leurs azymuths tombant du côté oppoſé au Pole élevé.

Les deux ſinus & coſinus de déclinaiſon

étant x, y & x', y'; & les ſinus & coſinus des angles horaires étant t, u & t', u', la 3.me formule donne

$$rnty + rcmx = msuy,$$
$$rnt'y' + rcmx' = msu'y'.$$

Ou (mettant pour $\frac{rx}{y}$ & $\frac{rx'}{y'}$, les tangentes des déclinaiſons X & X'),

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}.$$

D'où l'on tire pour la tangente de la hauteur du Pole,

$$\frac{rs}{c} = \frac{rt'X - rtX'}{t'u - tu'}.$$

Corollaire. Si l'un des Aſtres eſt dans l'Equateur, $X' = 0$; & l'on a

$$\frac{rs}{c} = \frac{rt'X}{t'u - tu'}.$$

PROBLEME XVI.

La hauteur du Pole étant connue, & deux Aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant vûs dans un même vertical, trouver l'heure de l'obſervation !

La 3.me formule donne deux Equations, entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de chaque aſtre, ſon angle horaire & ſon angle azymuthal : chaſſant par ces deux Equations l'angle azymuthal qui eſt le même dans l'une & dans l'autre, on a une Equation dans laquelle il n'y a plus d'inconnues que les ſinus des deux angles horaires.

L'aſcenſion droite de chaque aſtre étant donnée, l'on a une Equation entre les ſinus des angles horaires, & le ſinus de leur différence ou de leur ſomme qui eſt donnée.

Chaſſant donc par ces deux dernières

Equations, l'angle horaire d'un des Aſtres, on parvient à une Equation qui détermine l'angle horaire de l'autre ; dont l'aſcenſion droite étant donnée, l'on a l'heure de l'obſervation.

Exemple. Soient obſervés dans un même vertical deux Aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le Pole élevé, vers le Méridien ſupérieur, tous deux après leur paſſage au Méridien ; leurs azymuths tombant du côté oppoſé au Pole élevé ; la différence de leurs aſcenſions droites ne ſurpaſſant pas le Quart-de-cercle.

Les deux ſinus & coſinus de déclinaiſon étant x, y, & x', y' ; & les ſinus & coſinus des angles horaires étant t, u, & t', u' ; la 3.me formule donne

$$rnty + rcmx = msuy,$$
$$rnt'y' + rcmx' = msu'y'.$$

Ou (mettant pour $\frac{rx}{y}$ & $\frac{rx'}{y'}$ les tangentes des déclinaiſons X & X'),

$$\frac{su - cX}{t} = \frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'}.$$ Ou

$$st'u - stu' = ct'X - ctX'.$$

Et le ſinus de la différence des angles horaires des deux Aſtres étant p, & ſon coſinus étant q; l'on a *

$rt = qt' - p\sqrt{(rr - t't')}$; & $t'u - tu' = rp$.
L'on a donc

$$rps = ct'X - ctX'; \text{ ou}$$

$$t = \frac{ct'X - rps}{cX'};$$

qui, ſubſtitué dans l'Equation $rt = qt' - p\sqrt{(rr - t't')}$, donne

$rct'X - rrps = cqt'X' - cpX'\sqrt{(rr - t't')}$

Ou (faiſant $rps = A, rcX - cqX' = B, cpX' = C$)

$$rA - Bt' = C\sqrt{(rr - t't')};$$

D'où l'on tire

$$t' = \frac{rAB}{BB + CC} \pm \frac{rC}{BB + CC}\sqrt{(BB + CC - AA)}.$$

Ayant ainſi l'angle horaire d'un des

* *Voyez les Théorèmes à la fin de cet ouvrage.*

Aſtres, ou le temps écoulé depuis ſon paſſage au Méridien, en y ajoûtant ou en en retranchant la différence d'aſcenſion droite de cet Aſtre & du Soleil, on a l'heure de l'obſervation.

Corollaire 1. Si l'un des Aſtres eſt dans l'Equateur, $X' = 0$; & l'on a d'abord

$$t' = \frac{rps}{cX}.$$

D'où l'on tire une manière fort ſimple d'avoir l'heure.

Corollaire 2. Si l'on prend $q = \frac{rX}{X'}$; on a

$$t = \sqrt{(rr - \frac{r^4 ss}{ccX'X'})}.$$

Manière encore fort ſimple d'avoir l'heure.

Corollaire 3. Si les deux Aſtres ont la même aſcenſion droite, $p = 0$, $q = r$; & l'on a

$$rct'X = rct'X':$$

D'où l'on voit que $t = 0$: en effet, les deux Aſtres ſont dans le Méridien au moment de l'obſervation.

PROBLEME XVII.

DEUX Aſtres dont on connoît les déclinaiſons, & les Angles horaires au moment de l'obſervation, étant vûs dans un même Almicantarath, trouver la hauteur du Pole!

La 1.re formule donne deux Equations entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de chaque Aſtre, ſon angle horaire & ſa hauteur : chaſſant par ces Equations, la hauteur qui eſt la même dans l'une & dans l'autre, l'on a une Equation qui détermine la hauteur du Pole.

Exemple. Soient obſervés dans un même Almicantarath, deux Aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le Pole élevé, vers le Méridien ſupérieur ; tous deux après leur paſſage au Méridien.

Les deux ſinus & coſinus de déclinaiſon étant x, y, & x', y'; & les coſinus des angles

horaires étant u, & u'; la 1.re formule donne

$$rrh - rsx = cuy,$$
$$rrh - rsx' = cu'y':$$

$$rsx + cuy = rrh = rsx' + cu'y'.$$

D'où l'on tire pour la tangente de la hauteur du Pole,

$$\frac{rs}{c} = \frac{u'y' - uy}{x - x'}.$$

Corollaire. Si l'un des Aſtres eſt dans l'Equateur, $x' = 0$, $y' = r$; & l'on a

$$\frac{rs}{c} = \frac{ru' - uy}{x}.$$

PROBLEME XVIII.

La hauteur du Pole étant connue, & deux Aſtres dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſont données, étant vûs dans un même Almicantarath, trouver l'heure de l'obſervation!

La 1.re formule donne deux Equations entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de chaque Aſtre, ſon angle horaire & ſa hauteur : chaſſant par ces deux Equations la hauteur qui eſt la même dans l'une & dans l'autre, on a une Equation dans laquelle il n'y a plus d'inconnues que les ſinus des deux angles horaires.

L'aſcenſion droite de chaque Aſtre étant donnée, l'on a une Equation entre les ſinus des angles horaires, & le ſinus de leur différence ou de leur ſomme qui eſt donnée.

Chaſſant donc par ces deux dernières Equations l'angle horaire d'un des Aſtres,

on parvient à une E'quation qui détermine l'angle horaire de l'autre ; dont l'aſcenſion droite étant donnée, l'on a l'heure de l'obſervation.

Exemple. Soient obſervés dans un même Almicantarath deux Aſtres dont les déclinaiſons ſont vers le Pole élevé, vers le Méridien ſupérieur, tous deux après leur paſſage au Méridien ; la différence de leurs aſcenſions droites ne ſurpaſſant pas le Quart-de-cercle.

Les deux ſinus & coſinus de déclinaiſon étant $x, y,$ & x', y'; & les coſinus des angles horaires étant $u,$ & u'; la 1.re formule donne

$$rrh - rsx = cuy$$
$$rrh - rsx' = cu'y'$$

$\therefore$

$$rsx + cuy = rrh = rsx' + cu'y'; \text{ ou}$$
$$rsx - rsx' = cu'y' - cuy.$$

Et le ſinus de la différence des angles horaires des deux Aſtres étant $p,$ & ſon

cosinus étant q; l'on a *

$$ru = p\sqrt{(rr - u'u')} + qu';\text{ ou}$$

$$u = \frac{p}{r}\sqrt{(rr - u'u')} + \frac{qu'}{r},$$

qui, substitué dans l'Equation $rsx - rsx' = cu'y' - cuy$, donne

$$rrsx - rrsx' = rcu'y' - cpy\sqrt{(rr - u'u')} - cqu'y;$$

ou (faisant $rsx' - rsx = A$, $rcy' - cqy = B$, $cpy = C$),

$$rA + Bu' = C\sqrt{(rr - u'u')};$$

D'où l'on tire

$$u' = -\frac{rAB}{BB+CC} \pm \frac{rC}{BB+CC}\sqrt{(BB+CC-AA)}.$$

Ayant ainsi l'angle horaire d'un des Astres, ou le temps écoulé depuis son passage au Méridien ; en y ajoûtant ou en en retranchant la différence d'ascension droite de cet Astre & du Soleil, on a l'heure de l'observation.

Corollaire 1. Si l'un des Astres est dans

* *Voyez les Théorèmes à la fin de cet ouvrage.*

l'Equateur, $x' = 0$, & l'Equation précédente eſt un peu plus ſimple.

Corollaire 2. Si l'on prend $q = \frac{ry'}{y}$, l'Equation eſt auſſi plus ſimple.

Corollaire 3. Si les deux Aſtres ont la même aſcenſion droite, $p = 0$, $q = r$; & l'on a

$$u' = \frac{rs}{c} \left(\frac{x - x'}{y' - y} \right).$$

PROBLEME XIX.

Les déclinaiſons & les aſcenſions droites de trois E'toiles étant données, & le temps écoulé entre les momens où l'une des trois ſe trouve dans un même vertical avec chacune des deux autres, trouver l'heure de l'obſervation, & la hauteur du Pole !

La 3.me formule, pour le moment de la première obſervation, donne deux Equations, entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de la première & de la ſeconde Etoile, l'angle horaire de chacune, & leur angle azymuthal qui eſt le même : on chaſſe donc cet angle azymuthal par ces deux Equations, & l'on a une Equation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de la première & de la ſeconde Etoile, & l'angle horaire de chacune.

La même formule, pour le moment de la ſeconde obſervation, donne deux autres Equations,

Equations, entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de la première & de la troiſième Etoile, l'angle horaire de chacune, & leur angle azymuthal qui eſt le même: on chaſſe donc pareillement cet angle azymuthal par ces deux Equations; & l'on a une Equation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon de la première & de la troiſième Etoile, & l'angle horaire de chacune.

Les quatre Equations ſont donc réduites à *deux, qui ne contiennent plus que la hauteur du Pole, les déclinaiſons des trois Etoiles, & leurs angles horaires aux momens des deux obſervations.*

Et la hauteur du Pole étant la même dans chacune de ces deux Equations, on les réduit à *une ſeule Equation, qui ne contient plus que les déclinaiſons des trois Etoiles, les angles horaires de la première & de la ſeconde au moment de la première obſervation, & les Angles horaires de la première*

& de la troisième au moment de la seconde observation.

L'ascension droite de chaque Etoile étant donnée, on chasse de cette Equation les angles horaires de la seconde & de la troisième Etoile aux momens des deux observations, & l'on a *une Equation qui ne contient plus que des quantités connues avec les angles horaires de la première Etoile aux momens des deux observations.*

Le temps écoulé entre ces momens étant donné, c'est-à-dire, la différence ou la somme de ces deux angles; on chasse l'un des deux, & *l'on a une Equation qui détermine l'angle horaire de la première Etoile au moment d'une des observations :* ce qui (l'ascension droite de cette Etoile & du Soleil étant connue) donne l'heure de cette observation.

D'où l'on détermine l'angle horaire

de la ſeconde ou de la troiſième Etoile au moment de ſon obſervation : & mettant les angles horaires de la première & de la ſeconde Etoile, ou de la première & de la troiſième, dans une des Equations qui contiennent la hauteur du Pole, la déclinaiſon de ces Etoiles & leurs angles horaires, on a la hauteur du Pole.

Exemple. Soient trois Etoiles dont les déclinaiſons ſont vers le Pole élevé, dont les différences d'aſcenſion droite entre la première & la ſeconde, & entre la première & la troiſième, ne ſurpaſſent pas le Quart-de-cercle ; ſoient ces Etoiles obſervées vers le Méridien ſupérieur, & après leur paſſage au Méridien ; la première & la ſeconde dans un même vertical, & après un temps donné, la première & la troiſième dans un autre vertical.

Soient les tangentes de leurs déclinaiſons X, X', X'' : les ſinus & coſinus de leurs angles horaires, t, u ; t', u' ; ϑ, v ;

ϑ', υ' : les ſinus & coſinus des angles azymuthaux dans les deux obſervations, $m, n; m', n'$: la 3.me formule donne pour le moment de la première obſervation

$$\frac{rn}{m} = \frac{su - cX}{t}$$

$$\frac{rn}{m} = \frac{su' - cX'}{t'} :$$

& pour le moment de la ſeconde obſervation

$$\frac{rn'}{m'} = \frac{s\upsilon - cX}{\vartheta}$$

$$\frac{rn'}{m'} = \frac{s\upsilon' - cX'}{\vartheta'} .$$

Ces quatre E'quations ſe réduiſent donc à ces deux ;

$$\frac{s}{c} = \frac{t'X - tX'}{t'u - tu'} ,$$

$$\frac{s}{c} = \frac{\vartheta'X - \vartheta X''}{\vartheta'\upsilon - \vartheta\upsilon'} :$$

& ces deux à celle-ci ;

$$\frac{t'X - tX'}{t'u - tu'} = \frac{\vartheta'X - \vartheta X''}{\vartheta'\upsilon - \vartheta\upsilon'} ;$$

Ou (le ſinus & le coſinus de la différence d'aſcenſion droite de la première & de la ſeconde Etoile étant g & d; le ſinus & le coſinus de la différence d'aſcenſion droite de la première & de la troiſième étant γ & δ) l'on a *

$$\frac{t'X - tX'}{rg} = \frac{\vartheta' X - \vartheta X''}{r\gamma}.$$

$$\gamma t'X - \gamma t X' = g\vartheta' X - g\vartheta X''.$$

Ou (puiſque $t' = \frac{dt - gu}{r}$, & $\vartheta' = \frac{\delta\vartheta - \gamma v}{r}$) on a

$$d\gamma tX - g\gamma uX - r\gamma tX' = g\delta\vartheta X - g\gamma vX - rg\vartheta X''.$$

Mais t & ϑ étant les ſinus des angles horaires de la première Etoile aux momens des deux obſervations ; l'intervalle entre ces momens étant donné, & le ſinus & le coſinus de l'arc qui lui répond étant p & q, l'on a $\vartheta = \frac{qt - pu}{r}$, & $v = \frac{pt + qu}{r}$: mettant donc ces valeurs

* *Voyez les Théorèmes à la fin de cet ouvrage.*

dans l'Equation précédente, on trouve pour la tangente de l'angle horaire de la première Etoile au moment de la première obſervation.

$$\frac{rt}{u} = r\left[\frac{rg\gamma X - g\delta pX - g\gamma qX - rgpX''}{rd\gamma X - rr\gamma X' - g\delta qX + g\gamma pX + rgqX''}\right]$$

Ayant ainſi l'angle horaire de la première Etoile au moment de la première obſervation, l'on a auſſi l'angle horaire de la ſeconde Etoile au même inſtant, par l'Equation $t' = \frac{dt - gu}{r}$: & la hauteur du Pole, en ſubſtituant les valeurs de t & de t' dans l'Equation

$$\frac{s}{c} = \frac{t'X - tX'}{t'u - tu'}.$$

Corollaire. Si l'on prend la première Etoile dans l'Equateur, $X = o$, & le calcul eſt beaucoup plus ſimple ; car la tangente de l'angle horaire de cette Etoile au moment de la première obſervation ſe réduit à

$$\frac{rt}{u} = r\left[\frac{gpX''}{r\gamma X' - gqX''}\right].$$

Ce Problème peut être fort utile ſur Terre & ſur Mer, parce qu'il n'y a point d'obſervation plus facile, ni plus ſûre que celle de deux Aſtres dans un même vertical.

PROBLEME XX.

Trois hauteurs d'un Aſtre étant données, avec les deux intervalles de temps écoulés entre, trouver la déclinaiſon de l'Aſtre, & la hauteur du Pole !

La 1.re formule donne pour les momens des trois obſervations, trois Equations, dont chacune contient la hauteur du Pole, la déclinaiſon de l'Aſtre, ſon angle horaire, & ſa hauteur. La hauteur du Pole & la déclinaiſon de l'Aſtre étant les mêmes dans chacune, en les chaſſant l'une & l'autre, *les trois Equations ſont réduites à une où il n'y a plus que les hauteurs qui ſont données, & les trois Angles horaires.*

Les deux intervalles de temps écoulés entre les obſervations étant donnés, on a deux Equations entre les angles horaires & leurs différences ou leurs ſommes, qui répondent aux temps écoulés. Par ces

Equations chassant de l'Equation précédente deux des angles horaires aux momens de deux des observations, *l'on a une Equation qui détermine l'angle horaire de l'Astre au moment de la troisième observation.*

Ayant ainsi l'un des angles horaires connu, en le mettant dans les deux Equations qu'on a entre les angles horaires & leurs différences ou leurs sommes, on trouve les deux autres, *& l'on a les trois angles horaires.*

Deux de ces angles suffisent pour achever la solution du Problème; car reprenant deux des premières Equations que donnoit la formule, & mettant dans chacune la valeur connue de l'angle horaire qui lui convient, *on a deux Equations qui ne contiennent plus d'inconnues que la hauteur du Pole, & la déclinaison de l'Astre;* & chassant par ces deux Equations l'une de ces inconnues, *l'on a une Equation qui donne la déclinaison de l'Astre,*

ou la hauteur du Pole ; & l'une étant donnée, l'on a auſſi-tôt l'autre.

Exemple. Soit un Aſtre dont la déclinaiſon eſt vers le Pole élevé, obſervé vers le Méridien ſupérieur, après ſon paſſage au Méridien, dans trois hauteurs données ; les arcs qui répondent aux temps écoulés entre les obſervations ne ſurpaſſant pas le Quart-de-cercle.

Soient les trois hauteurs h, h', h''; les trois coſinus des angles horaires u, u', u'' : la 1.re formule donne les trois Equations.

$$rsx = rrh - cuy$$
$$rsx = rrh' - cu'y$$
$$rsx = rrh'' - cu''y;$$

D'où chaſſant rsx, on a

$$rrh - cuy = rrh' - cu'y$$
$$rrh - cuy = rrh'' - cu''y;$$

D'où chaſſant cy, on a

$$\frac{h - h'}{u - u'} = \frac{h - h''}{u - u''}.$$

Ou (faiſant $h - h' = \dot{h}$, & $h - h'' = \ddot{h}$)

$$\dot{h}u - \ddot{h}u = \dot{h}u'' - \ddot{h}u'.$$

Mais les intervalles de temps écoulés entre les obſervations étant donnés ; & le ſinus & coſinus de l'arc qui répond au temps écoulé entre la première & la ſeconde étant p & q ; & le ſinus & coſinus de l'arc qui répond au temps écoulé entre la première & la troiſième étant p' & q', l'on a les deux Equations $u' = \frac{qu - pt}{r}$, & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$: Et ſubſtituant ces valeurs de u' & de u'' dans l'Equation précédente, l'on a

$$r\dot{h}u - r\ddot{h}u = \dot{h}q'u - \ddot{h}qu + \ddot{h}pt - \dot{h}p't.$$

D'où l'on tire pour la tangente de l'angle horaire de l'Aſtre au moment de la première obſervation.

$$\frac{rt}{u} = r\left[\frac{r\dot{h} - r\ddot{h} + \ddot{h}q - \dot{h}q'}{\ddot{h}p - \dot{h}p'}\right].$$

Connoiſſant ce premier angle horaire,

on a le second & le troisième, en remontant aux Equations $u' = \frac{qu - pt}{r}$ & $u'' = \frac{q'u - p't}{r}$. Et l'on a les trois cosinus u, u', u'', dont deux suffisent pour le reste de la solution du Problème.

Car la 1.re Formule donnant

$$rsx = rrh = cuy$$
$$rsx = rrh' = cu'y:$$

On a

$$sx = \frac{rh'u - rhu'}{u - u'}; \text{ \&}$$

$$cy = \frac{rrh - rrh'}{u - u'}.$$

Ou (faisant $\frac{rh'u - rhu'}{u - u'} = rA$; & $\frac{rrh - rrh'}{u - u'} = rB$):

$$sx = rA; \text{ \&}$$
$$cy = rB: \text{ ou}$$

$$rrxx - ccxx = rrAA; \text{ \&}$$
$$cc(rr - xx) = rrBB.$$

Et chaſſant cc de ces deux Equations, on a

$$\left.\begin{matrix} x^4 - rr \\ - AA \\ + BB \end{matrix}\right\} xx + rrAA = o$$

Et faiſant $rr + AA - BB = rC$; l'on a

$$xx = \frac{rC}{2} \pm \frac{r}{2} \sqrt{(CC - AA)}.$$

On a ainſi la déclinaiſon de l'Aſtre.

Il eſt facile enſuite d'avoir la hauteur du Pole: car il eſt évident que dans les deux Equations $sx = rA$, & $cy = rB$, les ſinus & coſinus de la déclinaiſon de l'Aſtre & de la hauteur du Pole ſe trouvent combinés de la même manière; on trouvera pour le ſinus de la hauteur du Pole, la même expreſſion qu'on vient de trouver pour le ſinus de la déclinaiſon de l'Aſtre.

$$ss = \frac{rc}{2} \mp \frac{r}{2} \sqrt{(cc - AA)}.$$

Equivoque attaché à la nature de ce Problème. Si l'on veut donc en faire uſage, il faudra choiſir quelqu'Aſtre dont la

déclinaiſon diffère aſſez de la hauteur du Pole, pour que l'une ne puiſſe pas être priſe pour l'autre.

Scholie. C'eſt ce fameux Problème auquel les Géomètres & les Aſtronomes de l'Académie Impériale de Ruſſie ſe ſont tant appliqués, & dont ils ont donné pluſieurs belles ſolutions.

Je le crois cependant plus curieux qu'utile ; car ſur la Terre on a trop d'autres moyens de trouver la déclinaiſon des Etoiles & la hauteur du Pole, pour avoir recours à celui-ci : ſur la Mer, dès qu'on connoît l'Etoile qu'on obſerve, on a par les catalogues d'étoiles la déclinaiſon, avec plus de préciſion qu'il n'eſt néceſſaire pour la latitude Nautique : & ſi l'on vouloit ſe ſervir d'une Etoile qu'on ne connût pas, ou obſerver entre des nuages une Etoile qu'on croiroit la même que celle qu'on auroit obſervée aux premières hauteurs, il y auroit trop de péril de ſe méprendre.

PROBLEME XXI.

LES angles horaires de deux Etoiles qui paſſent par deux almicantaraths & par deux azymuths dont la poſition eſt inconnue, mais conſtante, étant donnés par les temps écoulés depuis les paſſages au Méridien juſqu'aux momens où elles coupent ces cercles : trouver la déclinaiſon de ces Etoiles & la hauteur du Pole!

Soient deux Etoiles dont les déclinaiſons ſont vers le Pole élevé, obſervées au Méridien ſupérieur, à leurs paſſages à deux almitancaraths & à deux azymuths, qui ſoient les mêmes pour l'une & pour l'autre; les temps écoulés depuis les paſſages au Méridien étant donnés, & les arcs qui leur répondent ne ſurpaſſant pas le Quart-de-cercle.

Soient les ſinus & coſinus des déclinaiſons des deux Etoiles x, y; & x', y';

les cosinus des Angles horaires lorsqu'elles passent au premier Almicantarath v & v'; & les cosinus, lorsqu'elles passent au 2.d v'' & v'''.

La 1.re formule donne pour le passage au premier Almicantarath

$$rrh = rsx + cvy$$
$$rrh = rsx' + cv'y' : \text{ ou}$$
$$\frac{rs}{c} = \frac{v'y' - vy}{x - x'}.$$

On a de même pour le passage au second Almicantarath,

$$\frac{Ts}{c} = \frac{v'''y' - v''y}{x - x'}.$$

On a donc;

$$\frac{y'}{y} = \frac{v - v''}{v' - v'''}.$$

Nommant t, t', & u, u', les sinus & cosinus des angles horaires des deux Etoiles lorsqu'elles passent au premier azymuth : & t'', t''', & u'', u''', les sinus & cosinus lorsqu'elles passent au second;

La

La 3.me formule donne pour le paſſage au premier azymuth

$$\frac{rn}{m} = \frac{suy - rcx}{ty}$$

$$\frac{rn}{m} = \frac{su'y' - rcx'}{t'y'} \text{ : ou,}$$

$$\frac{s}{rc} = \frac{t'xy' - t'xy}{t'uyy' - tu'yy'}.$$

On a de même pour le paſſage au ſecond azymuth,

$$\frac{s}{rc} = \frac{t'''xy' - t''x'y}{t'''u''yy' - t''u''yy'}:$$

On a donc

$$\frac{t'xy' - tx'y}{t'u - tu'} = \frac{t'''xy' - t''x'y}{t'''u'' - t''u'''}:$$

Ou (nommant p le ſinus de la différence des arcs horaires qui ont pour ſinus t & t' : & p' le ſinus de la différence des arcs horaires qui ont pour ſinus t'' & t''': ce qui donne * $rp = t'u - tu'$, & $rp' = t'''u'' - t''u'''$) l'on a

$$p't'xy' - p'tx'y = pt'''xy' - pt''x'y;$$

* *Voyez les Théorèmes à la fin de cet ouvrage.*

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \times \frac{pt''' - p't'}{pt'' - p't}.$$

Ou (mettant pour $\frac{y'}{y}$ sa valeur $\frac{v - v''}{v' - v'''}$ prise dans l'Equation des passages aux almicantaraths)

$$\frac{x'}{x} = \frac{v - v''}{v' - v'''} \times \frac{pt''' - p't'}{pt'' - p't'}.$$

L'Equation des passages aux almicantaraths, donne

$$y'y' = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 yy = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 (rr - xx):$$

Celle des passages aux azymuths, donne

$$x'x' = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 \times \left(\frac{pt''' - p't'}{pt'' - p't}\right)^2 xx:$$

On a donc

$$rr = \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 rr - \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 xx + \left(\frac{v - v''}{v' - v'''}\right)^2 \times \left(\frac{pt''' - p't'}{pt'' - p't}\right)^2 xx.$$

Ou

$$x = \frac{r(pt'' - p't)\sqrt{[(v' - v''')^2 - (v - v'')^2]}}{(v - v'')\sqrt{[(pt''' - p't')^2 - (pt'' - p't)^2]}}.$$

Ayant ainsi la déclinaison d'une des

Etoiles, on trouve facilement la déclinaiſon de l'autre ; & l'on a la hauteur du Pole par l'Equation

$$\frac{rs}{c} = \frac{v'y' - vy}{x - x'}.$$

Scholie. Ce Problème eſt un des plus beaux & des plus utiles de l'Aſtronomie, puiſque ſans dépendre de la connoiſſance de la hauteur du Pole, il ſert à trouver la déclinaiſon des Etoiles ; & que ſans connoître la déclinaiſon des Etoiles, il ſert à trouver la hauteur du Pole ; & cela, par les moyens les plus ſimples, & ſans avoir beſoin d'aucuns Arcs-de-cercle. On doit cette méthode à M. Mayer, à qui l'Aſtronomie doit tant d'autres excellentes choſes. On peut dire cependant qu'il l'a plûtôt indiquée que donnée. Elle eſt compliquée ; mais ſa beauté & ſon utilité m'ont fait m'appliquer à la déduire de mes Formules, d'où elle découle fort naturellement, & par leſquelles on parvient à un calcul aſſez ſimple.

PROBLEME XXII.

La déclinaiſon du Soleil étant donnée, trouver ſur Mer la hauteur du Pole par la durée du jour!

Si l'on conſidère ce Problème dans ſa plus grande ſimplicité; c'eſt-à-dire, ſans faire attention au changement du Soleil en déclinaiſon, au changement de lieu de l'Obſervateur, & à l'altération que la parallaxe & la réfraction cauſent dans l'apparence de la hauteur du Soleil; la ſolution eſt très-facile, & ſuit d'abord de notre 1.re formule: car, pour l'inſtant du lever ou du coucher du Soleil, elle donne ſans peine la relation entre la hauteur du Pole & la durée du jour par l'Equation.

$$rsx = cuy.$$

C'eſt ainſi, ou du moins dans ces circonſtances, que les Anciens déterminoient la hauteur du Pole: Et Ptolémée, qui nous a laiſſé les hauteurs du Pole d'un

grand nombre de villes, préféroit cette méthode à toutes les autres.

Ils ignoroient les effets de la Réfraction & de la Parallaxe, & choisissoient pour cette observation le jour du Solstice, parce que dans ce jour le Soleil ne change pas sensiblement de déclinaison. Cependant cette ignorance où ils étoient sur la Réfraction & la Parallaxe, & le peu d'exactitude avec laquelle ils connoissoient l'obliquité de l'Ecliptique & la mesure du temps, rendirent toutes leurs hauteurs du Pole défectueuses.

Prenons donc maintenant le Problème avec toutes ses circonstances : considérons que le Soleil, du matin au soir, change de déclinaison, que la Réfraction le fait voir plus haut, & la Parallaxe plus bas qu'il n'est en effet ; enfin, qu'entre les deux observations de son lever & de son coucher, l'observateur a changé de lieu lui-même.

Notre 1.re formule $rsx = cuy$, qui exprime la relation entre la hauteur du Pole, la déclinaiſon du Soleil & ſon angle horaire, ou la durée de ſa préſence ſur l'horizon, nous donnera la relation de tous les changemens qui arrivent dans ces quantités. Car ſuppoſant que ces changemens ne ſont pas conſidérables, & différentiant cette Equation, l'on a

$$rsdx + rxds = cudy + cydu + uydc.$$

Ou (mettant pour la différentielle des ſinus & coſinus de la déclinaiſon du Soleil le petit arc $dD = \frac{rdx}{y} = - \frac{rdy}{x}$: & pour la différentielle des ſinus & coſinus de la hauteur du Pole ou de la latitude le petit arc $dL = \frac{rds}{c} = - \frac{rdc}{s}$: & pour la différentielle du coſinus de l'angle horaire, le petit arc de l'Equateur $dE = \frac{rdu}{t}$)

$$dE = \frac{r^3 s}{ctyy} dD \pm \frac{r^3 x}{ccty} dL, \text{ ou}$$

$$dE = \frac{r^3 s}{y\surd(cc-xx)} dD \pm \frac{r x}{c\surd(cc-xx)} dL.$$

Le ſigne eſt + ou — ſelon que le changement de latitude de l'obſervateur conſpire ou eſt contraire au changement de déclinaiſon du Soleil.

Voilà les altérations que cauſent à la durée du jour le changement du Soleil en déclinaiſon, & le changement de latitude de l'obſervateur : Il y en a encore deux autres. L'une eſt celle que cauſe le changement en longitude de l'obſervateur ; l'autre eſt celle que cauſent la réfraction & la parallaxe.

Quant à l'altération cauſée à la durée du jour par le changement en longitude ; l'obſervateur connoiſſant la route qu'il a faite dans la journée, & à peu près la latitude où il eſt, il a la différence des longitudes du matin & du ſoir ; & le temps

qui répond à cette différence eſt cette altération.

Quant à l'altération cauſée par la réfraction & par la parallaxe ; il faut remarquer que la réfraction élevant l'apparence du Soleil, & la parallaxe la baiſſant, ſi l'on retranche de ſa réfraction la parallaxe, il ne reſte plus à conſidérer que l'effet de cette différence, par lequel le Soleil paroît plus haut qu'il n'eſt; & plus tôt le matin & plus tard le ſoir qu'il ne devroit paroître. Mais la parallaxe du Soleil eſt ſi peu conſidérable, qu'on la peut négliger ici entièrement.

Il ſuffit donc de chercher de combien la réfraction horizontale alonge la durée du jour, tant le matin que le ſoir; & pour cela, ayant la quantité de la réfraction horizontale, l'on a par les Problèmes X ou XII, le temps que le Soleil emploie à s'élever ou à s'abaiſſer de cette hauteur ; & c'eſt l'altération que la réfraction cauſe

à la durée du jour. Mais on a un moyen plus ſimple pour trouver cette altération par la ſeule obſervation.

Car négligeant, comme on le peut faire ici, les petites différences de la réfraction & des grandeurs apparentes du Soleil, ſon diamètre apparent ſe trouve aſſez exactement égal à la quantité dont la réfraction horizontale l'élève.

Au lever du Soleil donc, lorſqu'on voit ſon bord ſupérieur entamer l'horizon, ſon bord inférieur l'atteint actuellement, & ſon centre l'a déjà paſſé de la moitié de ſon diamètre : ſi donc on retranche de l'heure que marque la Montre dans ce moment, la moitié du temps que le Soleil emploie à s'élever de tout ſon diſque, on aura l'heure que marquoit la Montre au moment de l'émerſion du centre. De même au coucher du Soleil, lorſqu'on voit ſon bord ſupérieur diſparoître dans l'horizon, ſon bord inférieur l'atteint actuellement, & ſon centre en eſt encore

éloigné de la moitié de ſon diamètre : ſi donc à l'heure que marque la Montre dans ce moment, on ajoûte la moitié du temps que le Soleil emploie à s'abaiſſer de tout ſon diſque, on aura l'heure que marque la Montre au moment de l'immerſion du centre.

La correction totale que la réfraction rend néceſſaire à la durée du jour, déterminée par l'inſtant où le premier rayon du Soleil paroît dans l'horizon, & par l'inſtant où le dernier rayon y diſparoît, eſt donc d'ajoûter à l'intervalle entre ces deux inſtans, la durée entière du lever ou du coucher du Soleil. C'eſt une choſe remarquable & heureuſe pour le Navigateur, que la grandeur apparente du diſque du Soleil ſoit une meſure de la réfraction horizontale, & qu'elle lui ſerve à en corriger les erreurs.

Si le changement en latitude de l'obſervateur dans la journée étoit trop grand, l'expreſſion que nous avons donnée pour la

correction qui en résulte, seroit défectueuse, parce que nous avons supposé ce changement très-petit par rapport aux autres lignes : mais il seroit toûjours très-facile au Navigateur qui voudroit trouver par cette méthode le lieu où il est, de diriger sa route du matin au soir, de telle sorte qu'il ne s'approchât ni ne s'éloignât beaucoup du Pole.

Quant au changement du Soleil en déclinaison, il est évident que c'est une quantité aussi petite qu'il est ici nécessaire.

Et quant aux deux autres corrections, celle qu'on fait pour la réfraction, & celle pour le changement de longitude de l'observateur, elles seront toûjours assez justes si on les fait avec les précautions que nous avons marquées.

La plûpart de ces corrections qu'il faut faire à la durée du jour observée, supposent qu'on ait déjà la hauteur du Pole, qui est ce qu'on cherche : on déterminera donc d'abord grossièrement la hauteur du

Pole, telle que la donne la durée du jour ſans les corrections; & cette hauteur ſera aſſez exacte pour qu'on puiſſe l'employer dans les corrections.

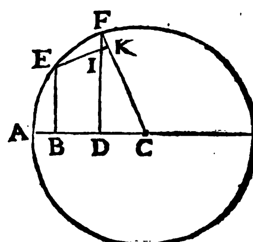
La durée du jour ainſi corrigée, l'on pourra s'en ſervir, comme ſi la déclinaiſon du Soleil étoit toûjours la même, comme ſi l'obſervateur n'avoit pas changé de lieu, & comme s'il n'y avoit ni réfraction ni parallaxe. Et l'on aura ſur la mer la hauteur du Pole avec plus d'exactitude que les anciens Aſtronomes ne l'avoient ſur la terre au jour du Solſtice.

Malgré tout ce que j'ai fait pour rendre cette méthode univerſelle, elle a encore une reſtriction à laquelle la nature de la choſe la borne : lorſque le Soleil eſt dans l'Equateur, la durée du jour étant la même par toute la terre, elle ne ſauroit ſervir pour déterminer la hauteur du Pole.

FIN.

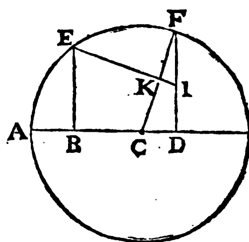
THE'OREME.

1. Les ſinus de deux Arcs, dont le plus grand ne ſurpaſſe pas le Quart-de-cercle, étant $EB = a$, $FD = \alpha$; leurs coſinus $CB = b$, $CD = \beta$; le ſinus de leur différence $EK = p$, ſon coſinus $CK = q$: l'on a



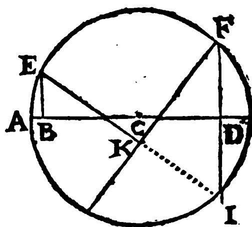
$$ra = q\alpha - p\beta$$
$$rb = p\alpha + q\beta$$
$$rp = \alpha b - a\beta$$
$$rq = a\alpha + b\beta.$$

2. Si l'un des deux Arcs ſurpaſſe le Quart-de-cercle, leur différence demeurant plus petite que le Quart-de-cercle, le point D tombe de l'autre côté



de C; β devient négatif, tout le reste demeurant le même : Et l'on a

$$ra = q\alpha + p\beta$$
$$rb = p\alpha - q\beta$$
$$rp = \alpha b + a\beta$$
$$rq = a\alpha - b\beta.$$

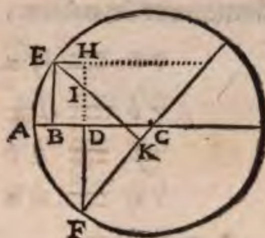


3. Si la différence des deux Arcs surpasse le Quart-de-cercle, le point D tombe de l'autre côté de C, le point K aussi ; β & q deviennent négatifs : Et l'on a

$$ra = -q\alpha + p\beta$$
$$rb = p\alpha + q\beta$$
$$rp = ab + a\beta$$
$$rq = -a\alpha + b\beta$$

THEOREME.

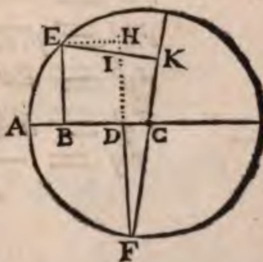
1. Les ſinus de deux Arcs dont la ſomme ne ſurpaſſe pas le Quart-de-cercle, étant $EB = a, FD = \alpha$;



leurs coſinus $CB = b, CD = \beta$; le ſinus de leur ſomme $EK = p$, ſon coſinus $CK = q$: l'on a

$$ra = p\beta - q\alpha$$
$$rb = p\alpha + q\beta$$
$$rp = a\beta + \alpha b$$
$$rq = -a\alpha + b\beta.$$

2. Si chacun des deux Arcs étant plus petit que le Quart-de-cercle, leur ſomme ſurpaſſe le Quart-de-cercle; le point D tombe



du même côté de C, & le point K de

